



DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN AUTOMÁTICA, ELECTRÓNICA,  
ARQUITECTURA Y REDES DE COMPUTADORES

MEMORIA DE TESIS DOCTORAL

CONTRIBUCIÓN AL ANÁLISIS DE SISTEMAS  
REALIMENTADOS.  
APLICACIÓN AL CONTROL DE BIFURCACIONES EN  
UN SISTEMA MULTIPARAMÉTRICO.

José Francisco Moreno Verdulla.

Director: Dr. Manuel Jesús López Sánchez.

Cádiz, Noviembre de 2015.



*A mi familia.  
A todos de los que aprendí.*





UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

# CONTRIBUCIÓN AL ANÁLISIS DE SISTEMAS REALIMENTADOS.

## APLICACIÓN AL CONTROL DE BIFURCACIONES EN UN SISTEMA MULTIPARAMÉTRICO.

Memoria realizada por José Francisco Moreno Verdulla en el Departamento de Ingeniería en Automática, Electrónica, Arquitectura y Redes de Computadores de la Universidad de Cádiz, bajo la dirección del Prof. Titular de Universidad Dr. D. Manuel Jesús López Sánchez, en el área de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Cádiz, para optar al grado de Doctor por la Universidad de Cádiz.

VºBº el director:

Fdo.: Manuel Jesús López Sánchez.

Aspirante al grado de Doctor:

Fdo.: José Francisco Moreno Verdulla.

Sello del Departamento.



# Agradecimientos

Quiero demostrar mi agradecimiento,

- Al Prof. Dr. D. Manuel Jesús López Sánchez, director de esta tesis, por sus enseñanzas, paciencia, compromiso y por el impagable sacrificio de su tiempo durante tantas y tantas reuniones. Como siempre te he dicho, con toda mi sinceridad y sin más palabras, gracias Manolo, como dice el aforismo, *“no por darme el pescado, sino por enseñarme a pescar”*.
- Al Prof. Dr. D. Manuel Prian Rodríguez, compañero de fatigas durante tanto tiempo, fuente inagotable de ideas y de duros e interesantísimos debates sobre *“nuestros propios caos”*. Gracias Manolo, tu perseverancia y tu estímulo han sido fundamentales para que me decidiera a presentar este trabajo.
- Al Prof. D. Víctor Sánchez Corbacho, por montar la tarjeta del circuito KSS, por proporcionarme valiosísimas herramientas de LaTeX que no conocía y por su exhaustiva y afinada labor en la corrección del texto final.
- A los profesores Dr. D. Luis García y Dr. D. José Lorenzo, miembros del grupo GAPSIS por su ayuda con dSpace.
- A D. Luis Francisco Morales, por montar las tarjetas de los circuitos de González y Chua.
- A los compañeros del Departamento y del Área de Ingeniería de Sistemas y Automática, todos me dieron su ánimo y apoyo durante la realización de esta tesis.
- Por último, a mi mujer y a mis hijos, por siempre, por todo.



# Prefacio

*Sólo sé que nada sé.*  
Sócrates (469-399 a. C.)

*Ser o no ser, he ahí el dilema.*  
“Hamlet”. Shakespeare (1564-1616)

Cuando al emprender la tarea de escribir esta tesis, hace ya algún tiempo, muy motivado por el reto y creyendo ser capaz de emular a Hércules y resolver con éxito no sólo los “doce” sino todos los “trabajos” que encontraría en el camino, no era consciente de muchas cosas. La realidad se fue imponiendo y aparecieron limitaciones de todo tipo, entonces me sentí incapaz y quise abandonar. Fue en aquellos momentos cuando el sostén del director de tesis y de los compañeros del grupo GAPSIS<sup>1</sup> demostraron su valía. Las dificultades encontradas en el método experimental y en la justificación teórica del procedimiento, han hecho que me planteara abandonar muchas veces y, en otras tantas, ellos me han ayudado a recuperar la motivación y la confianza, haciendo que participara en otros trabajos relacionados con el caos, en los que aprendí mucho.

Se atribuye a Edison aquello de “la lámpara incandescente es el resultado de 999 fracasos”, no puedo mostrarme más de acuerdo. No he contado los fracasos, pero han sido muchos. Hasta donde llega mi conocimiento, y ante la imposibilidad de conocer todo lo publicado, los métodos de análisis y control de bifurcaciones y caos que se realizan sobre sistemas dinámicos o sobre modelos matemáticos de sistemas, predominan sobre los métodos experimentales en sistemas reales y, en tales casos, la solución ofrecida suele ser “ad-hoc”, por lo que había que empezar casi de cero. El método original y los resultados que se someten a evaluación en este trabajo son sólo una pequeña contribución que demuestra la utilidad del control por pulsos sobre varios sistemas y circuitos. Las experiencias vividas me han confirmado la universalidad y atemporalidad de la sentencia socrática, pero el valor para presentar esta tesis lo obtuve al resolver mi duda shakesperiana.

---

<sup>1</sup>Grupo de Automática, Procesamiento de Señales e Ingeniería de Sistemas de la Universidad de Cádiz.

La tesis ha quedado organizada en cinco capítulos. En el capítulo 1 *Introducción, fundamentos y objetivos*, se considera el estado del arte, se recuerdan algunas definiciones, se formula la hipótesis y se definen los objetivos.

El capítulo 2 *Método de control propuesto*, presenta el problema de control y la estrategia de diseño del algoritmo de control propuesto, mostrando la forma original y novedosa de definir la condición de evento variable. También se discute el problema de la síntesis de los pulsos de control y sus variantes.

El capítulo 3 *Resultados de simulación numérica*, considera el problema del ruido de medida y muestra los resultados de experimentos tipo Monte-Carlo realizados con diferentes condiciones iniciales, instante de aplicación del control y valores de los parámetros del controlador sobre varios modelos matemáticos de sistemas caóticos.

El capítulo 4 *Realización y resultados experimentales*, recoge detalles del diseño de las tarjetas experimentales, del sistema de control en tiempo real estricto utilizado y muestra los resultados obtenidos sobre la realización experimental de tres sistemas caóticos sometidos a las cuatro variantes de la ley de control.

Finalmente en el capítulo 5 *Conclusiones* se exponen las conclusiones del trabajo y las líneas de continuación propuestas.

Puerto Real, Noviembre 2015.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Prefacio</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción, fundamentos y objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. Antecedentes . . . . .	3
1.3. Complejidad, bifurcaciones y caos . . . . .	4
1.4. Sistema dinámico. Equilibrio. Bifurcación. Caos . . . . .	8
1.4.1. Estabilidad de los equilibrios y sus bifurcaciones . . . . .	11
1.5. Sobre el control del caos determinista . . . . .	21
1.5.1. Métodos de control basados en eventos discretos . . . . .	23
1.5.2. Control impulsivo . . . . .	26
1.5.3. Métodos de control basados en retardos “ <i>time delay</i> ” . . . . .	27
1.5.4. Otras aproximaciones . . . . .	29
1.6. Hipótesis y objetivos . . . . .	30
1.6.1. La hipótesis fundamental planteada . . . . .	31
1.6.2. Objetivos . . . . .	32
<b>2. Método de control propuesto</b>	<b>35</b>
2.1. Introducción . . . . .	37
2.2. Estrategia de diseño del controlador . . . . .	38
2.2.1. Restricciones al diseño . . . . .	39
2.2.2. Formulación del problema de control . . . . .	40
2.2.3. Parámetros del controlador . . . . .	43
2.3. Síntesis y datación del evento variable . . . . .	44
2.3.1. Morfología de la oscilación caótica . . . . .	44

2.3.2. Definición del evento variable . . . . .	48
2.4. Síntesis de la amplitud del pulso de control . . . . .	51
2.4.1. Ley de control propuesta . . . . .	51
2.4.2. Análisis en detalle de la ley de control . . . . .	53
2.4.3. Otras variantes de utilidad . . . . .	56
2.5. El ruido de medida . . . . .	57
2.6. Ajuste por el operador . . . . .	60
2.7. El algoritmo de control como sistema híbrido . . . . .	61
2.8. El algoritmo como sistema conmutado . . . . .	65
2.9. Análisis de estabilidad . . . . .	67
<b>3. Resultados de simulación numérica</b>	<b>69</b>
3.1. Introducción . . . . .	71
3.2. Primeras simulaciones . . . . .	72
3.2.1. Sistema de Lorenz . . . . .	72
3.2.2. Sistema de Chen . . . . .	75
3.2.3. Sistema de Lu . . . . .	77
3.2.4. Sistema de Liu . . . . .	79
3.3. Análisis de sensibilidad . . . . .	81
3.3.1. Sensibilidad al ruido de medida . . . . .	81
3.3.2. Sensibilidad a las condiciones de simulación . . . . .	83
3.3.3. Sensibilidad a los parámetros del controlador . . . . .	85
3.4. Otros resultados de simulación numérica . . . . .	86
3.4.1. Oscilador de Colpitts . . . . .	87
3.4.2. Circuito de González . . . . .	91
3.4.3. Circuito de Chua . . . . .	98
3.4.4. Circuito KSS . . . . .	108
3.5. Sistemas forzados: Duffing y Van der Pol . . . . .	112
3.5.1. Modelo de Duffing . . . . .	116
3.5.2. Modelo de Van der Pol-Duffing . . . . .	119
<b>4. Realización y resultados experimentales</b>	<b>121</b>
4.1. Introducción . . . . .	123
4.2. El equipo de control en tiempo real . . . . .	123
4.3. Resultados experimentales . . . . .	127



4.3.1. Resultados experimentales en el circuito KSS . . . . .	128
4.3.2. Resultados experimentales en el circuito de González . . . . .	135
4.3.3. Resultados experimentales en el circuito de Chua . . . . .	142
4.4. Resumen, crítica y limitaciones experimentales . . . . .	149
<b>5. Conclusiones</b>	<b>151</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>157</b>



# **Capítulo 1**

## **Introducción, fundamentos y objetivos**



## 1.1. Introducción

En este capítulo se hace una breve presentación de los fundamentos generalmente aceptados que rigen el control de las bifurcaciones (estáticas y dinámicas) y del caos determinista. Como es bien sabido, la dificultad del análisis y el control de sistemas no lineales, así como de sus modelos matemáticos, hace que, aunque exista un cuerpo matemático muy desarrollado, sean escasas las soluciones generales, prefiriéndose, para cada sistema concreto, la simplificación de sus modelos (lo que implica reconocer que todos los modelos son inciertos e imprecisos), y buscar soluciones particulares o locales que resulten útiles según algún criterio prefijado.

En particular, para el control de las bifurcaciones dinámicas permanentes que dan lugar a la aparición de infinitas órbitas inestables inmersas en el atractor caótico, y que son las que caracterizan el comportamiento de los sistemas caóticos y a sus modelos matemáticos, se han desarrollado diferentes métodos de análisis y control, en los que la búsqueda de algún otro comportamiento particular (estabilización en punto fijo, estabilización de UPO -*unstable periodic orbit*-, y el mantenimiento estabilizado en una SPO -*stable periodic orbit*- o PO -*periodic orbits*-) a partir de un comportamiento caótico ha sido lo determinante y que, como se señalará mas adelante, es también el objetivo del control a desarrollar en esta memoria, pues la estabilización de osciladores electrónicos, que pueden presentar indeseables bifurcaciones y entrar en caos, es de gran importancia en muchas aplicaciones prácticas.

## 1.2. Antecedentes

Se admite que los primeros estudios teóricos sobre dinámica no lineal, aparecen asociados al interés científico del siglo XIX por comprender (modelar) y predecir (resolver) los movimientos de los planetas y, por tanto, extraer conclu-

siones válidas sobre la estabilidad del sistema solar. Los trabajos de Newton, Poincaré y Liapunov, tres grandes del pensamiento no lineal, planteaban diferentes aspectos de esta problemática. A partir de ellos, empiezan a surgir multitud de trabajos, principalmente en el ámbito de las matemáticas, entre los que destacan [Mira (2006)] los de Birkhoff y los de Kolmogorov, Arnold y Moser (KAM), que tuvieron lugar entre 1920 y 1960. En el ámbito del análisis y diseño de aplicaciones (osciladores electrónicos), pueden considerarse las contribuciones de Andronov (alrededor de 1940-1950) [Andronov y Chaikin (1949), Mira (1997)] como el origen de una de las principales líneas de la dinámica no lineal, los sistemas autónomos. Se le atribuye junto a Hopf, el análisis de bifurcaciones hacia y desde ciclos límites y el enunciado del teorema de la bifurcación Andronov-Hopf (ver 1.4.1).

El descubrimiento de comportamientos extraños en modelos estructurales simples como el de Lorenz (1963) [Lorenz (1963)] y de la cascada de bifurcaciones por desdoblamiento del periodo (subarmónicos) de Feigenbaum (1970), dio lugar al desarrollo de innumerables trabajos y estudios de carácter multidisciplinar sobre los que comenzó el cuerpo de doctrina que se conoce actualmente como dinámica no lineal. Su profusión y diferentes enfoques hacen que su reseña se haga casi imposible. Puede encontrarse una excelente síntesis sobre el desarrollo inicial de la dinámica no lineal en [Mira (1997), Arecchi *et al* (1998), Andrievskii y Fradkov (2003)].

### 1.3. Complejidad, bifurcaciones y caos

Tratar de explicar la **complejidad** que está siempre presente en el comportamiento dinámico de muchos fenómenos, naturales o no, sigue siendo un reto que requiere del análisis no lineal y de aproximaciones que suelen incluir modelos matemáticos no lineales. La dinámica no lineal [Mira (2006)] “*es un campo de la ciencia que estudia el comportamiento con el tiempo de los sistemas reales para los que la matemática lineal es solo una aproximación*”. A. C. Scott, en [Scott

(2007)] al tratar de responder de una forma “sencilla” a la cuestión *¿que es la ciencia de la no linealidad?*, recurre a Aristóteles, señalando que *“es el estudio de aquellos fenómenos dinámicos en los cuales el todo difiere de la suma de sus partes”*, añadiendo, que: *“en otras palabras, los efectos particulares no pueden ser asignados a causas particulares (como ocurre en los sistemas lineales) ya que todos los componentes del sistema interactúan unos con otros”*. Algunas ramas de las ciencias que estudian **fenómenos complejos** son [Scott (2007)]: **caos**, turbulencias, estructuras emergentes, filamentos y filamentación, fenómenos de conmutación por umbral (*“threshold”*), formación espontánea de patrones y rutas, cambio de fases o estado físico en condiciones extremas, generación de armónicos, sincronización, ondas de choque, sistemas jerarquizados, fenómenos psicológicos, fenómenos sociales, ...vida.

De acuerdo con [Scott (2007)], una aproximación a un problema complejo por un modelo no lineal, requiere revisar el concepto de *causalidad*, según la reflexión aristotélica *“deberíamos considerar en cuantas veces **porque** resuelve la cuestión **¿por qué?**”*, y estudiar las *“cuatro causas determinantes de las cosas”*. Así, subrayando en estas causas algunos términos propios del análisis no lineal, entre las *causas materiales* se puede considerar el problema de la **variación de parámetros en los modelos y el análisis de bifurcaciones**; en las *causas formales* se requiere el **establecimiento de fronteras o límites de validez de los modelos**; las *causas eficaces* son aquellas en las que se intenta encontrar las **relaciones estímulo-respuesta e identificar las variables dependientes distinguiéndolas de las variables forzantes** y, por último, las *causas finales* en las que podrían encajarse los **ensayos sobre sistemas reales que no pueden ser simulados** [Scott (2007)]. Esta interesante reflexión sobre la complejidad y la dificultad de establecer relaciones de causalidad en sistemas no lineales, estará presente a la hora de argumentar la génesis de la ley de control que se propone en esta memoria, y que se discutirá en la sección [2.4.2](#).

Así pues, como se sabe, en los sistemas dinámicos no lineales, cuando varían

los parámetros de su modelo matemático, pueden ocurrir cambios en la estructura cualitativa de sus soluciones (o equivalentemente, en su trayectoria dinámica); se dice entonces que se ha producido una **bifurcación**<sup>1</sup> [Andronov y Chaikin (1949), Guckenheimer y Holmes (1983), Khalil (1995), Chen *et al* (2000), Hoppensteadt (2000)]. Surgen, alrededor de cada valor del parámetro de bifurcación, cambios en el conjunto de situaciones de equilibrio, con implicaciones que pueden resultar peligrosas sobre la estabilidad y con la aparición o desaparición de soluciones periódicas. En definitiva, la bifurcación de un equilibrio puede dar lugar a nuevos comportamientos en el sistema, tales, que resulten complicados a la hora de su control.

Al hacer referencia a sistemas en los que aparece una entrada de control, es necesario distinguir en ellos [Chang (2000)] entre las bifurcaciones de los puntos de equilibrio (ocasionadas internamente, en lazo abierto o con control nulo), y las bifurcaciones bajo control [Abed *et al* (1995), Abed y Fu (1986), Chen *et al* (2000)]. Como ya se ha dicho más arriba, las primeras ocurren cuando, debido a la variación de los parámetros, un equilibrio del sistema dinámico sin control pierde su estabilidad estructural, caracterizada por la hiperbolicidad de la linealización en el equilibrio (ver sección 1.5.1). Las segundas, que son las que resultan objeto de este estudio, las **bifurcaciones en control**, ocurren cuando el sistema de control pierde su capacidad de estabilización, caracterizada por la controlabilidad de la linealización en el equilibrio [Xiao y Kang (2002)]. En [Thomson y Stewart (2002)] se distingue, en el ámbito local, entre bifurcaciones continuas y discontinuas o catastróficas y, en un contexto global, se estudia el fenómeno de las intermitencias. Cuando se presentan estas situaciones, resulta fundamental ejercer el control sobre la bifurcación que se ha originado. Se sabe [Kang (1997), Chang (2000), Chen *et al* (2000), Xiao y Kang (2002)] que, en determinados casos, una realización de **control por realimentación del estado**, logra reconducir la bifurcación en control

---

<sup>1</sup>Ya observadas por Andronov 1949. En la versión en inglés de su Teoría de las Oscilaciones ([Andronov y Chaikin (1949)], p330), se usa el término “*branch*” para referirse a este cambio cualitativo en el comportamiento dinámico.



a una situación en la que el sistema resulta controlable en el entorno próximo al punto de bifurcación [Xiao y Kang (2002)].

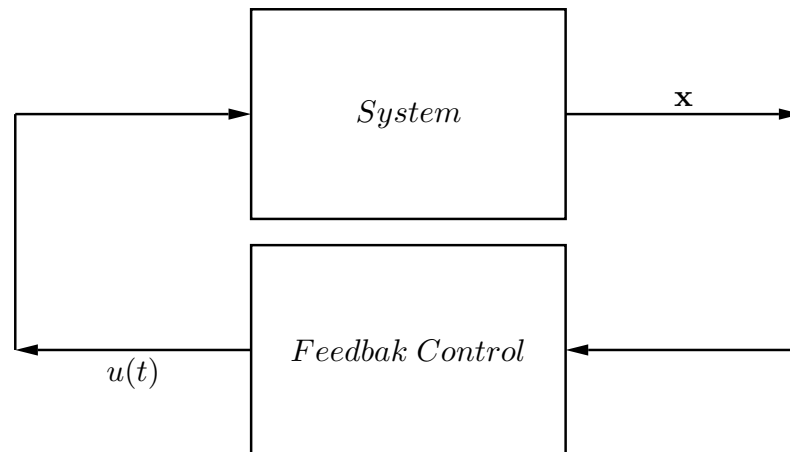


Figura 1.1: Estructura de control de bifurcaciones por realimentación del estado.

Uno de los primeros estudios sistemáticos de las bifurcaciones en sistemas de control con su análisis teórico y sus posibilidades de control se encuentra en [Abed y Fu (1986)]. Desde entonces, el interés por el problema originó una pléyade de trabajos que mostraban diferentes aproximaciones, métodos y aplicaciones de ingeniería, recogidos en el tutorial de Cheng *et al* [Chen *et al* (2000)].

En el contexto matemático [Guckenheimer y Holmes (1983), Kang (1997), Kang y Li (1997), Chang (2000), Xiao y Kang (2002)], se desarrollaron aproximaciones a la teoría del control de bifurcaciones basada en formas normales e invariantes, estudiando diferentes tipos de bifurcaciones y proponiendo algunos métodos genéricos para el control de la bifurcación mediante realimentación del vector de estado. Una revisión del inicio de la teoría de bifurcaciones puede encontrarse en el citado tutorial [Chen *et al* (2000)] y su lista de referencias.

## 1.4. Sistema dinámico. Equilibrio. Bifurcación. Caos

Una forma común de describir sistemas mediante modelos matemáticos, es la representación de los mismos por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (ecuaciones de estado):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{x} \in R^n$  es el vector  $n$ -dimensional de estado dinámico ( $x_i(t)$   $i = 1 \dots n$ ),  $\dot{\mathbf{x}} \in R^n$ , es el vector de velocidad de cambio del estado ( $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$   $i = 1 \dots n$ ),  $\mathbf{p} \in R^{n_p}$  es el vector  $n_p$ -dimensional de parámetros del sistema. La estructura  $\mathbf{F}$  es una función no lineal multivariable o campo vectorial, la cual, en muchos casos, es una función suave y en otros casos es una función lineal a tramos.

Esta forma, denominada genéricamente “*sistema dinámico*” es totalmente determinista, pues las variables dinámicas no son estocásticas, y si existe una solución o *trayectoria dinámica*  $\mathbf{x} = f(\mathbf{x}, t_0, \mathbf{x}_0)$ , en  $t_0$ , calculada a partir de una condición inicial  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , ésta sería determinable completamente, de manera que para un  $t > t_0$  dado se podría calcular  $\mathbf{x} = f(\mathbf{x}, t_0, \mathbf{x}_0)$  sin incertidumbre. Si además,  $f(\cdot) = \mathbf{0}$  para algún valor de  $t = t_f$  significa que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  y por tanto  $\mathbf{x} = f(\mathbf{x}, t_f, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}^*$  y la dinámica se desarrollaría a partir de entonces en un *punto fijo o equilibrio*  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  que podría ser estable para todo  $t > t_f$  (ver 1.4.1).

En la figura 1.2, se tienen diferentes trayectorias que corresponden a diferentes valores de uno de los parámetros ( $\sigma$ ) del sistema dinámico de Lorenz. Así para los valores de  $\sigma$  1, 2, 3, se tienen trayectorias que conducen a un punto de equilibrio que resulta estable, para valores de  $\sigma$  3.25, 3.5 y 3.75, se tiene trayectorias que convergen en otro punto de equilibrio, también estable. Por último, para  $\sigma$  4, 5 y 6, las trayectorias ya no convergen en los puntos anteriores, sino que se tienen órbitas alrededor de ellos, lo que sugiere el cambio de carácter de los equilibrios, es decir, hay valores de  $\sigma$  en los que se producen cambios cualitativos en

las trayectorias o *bifurcaciones*.

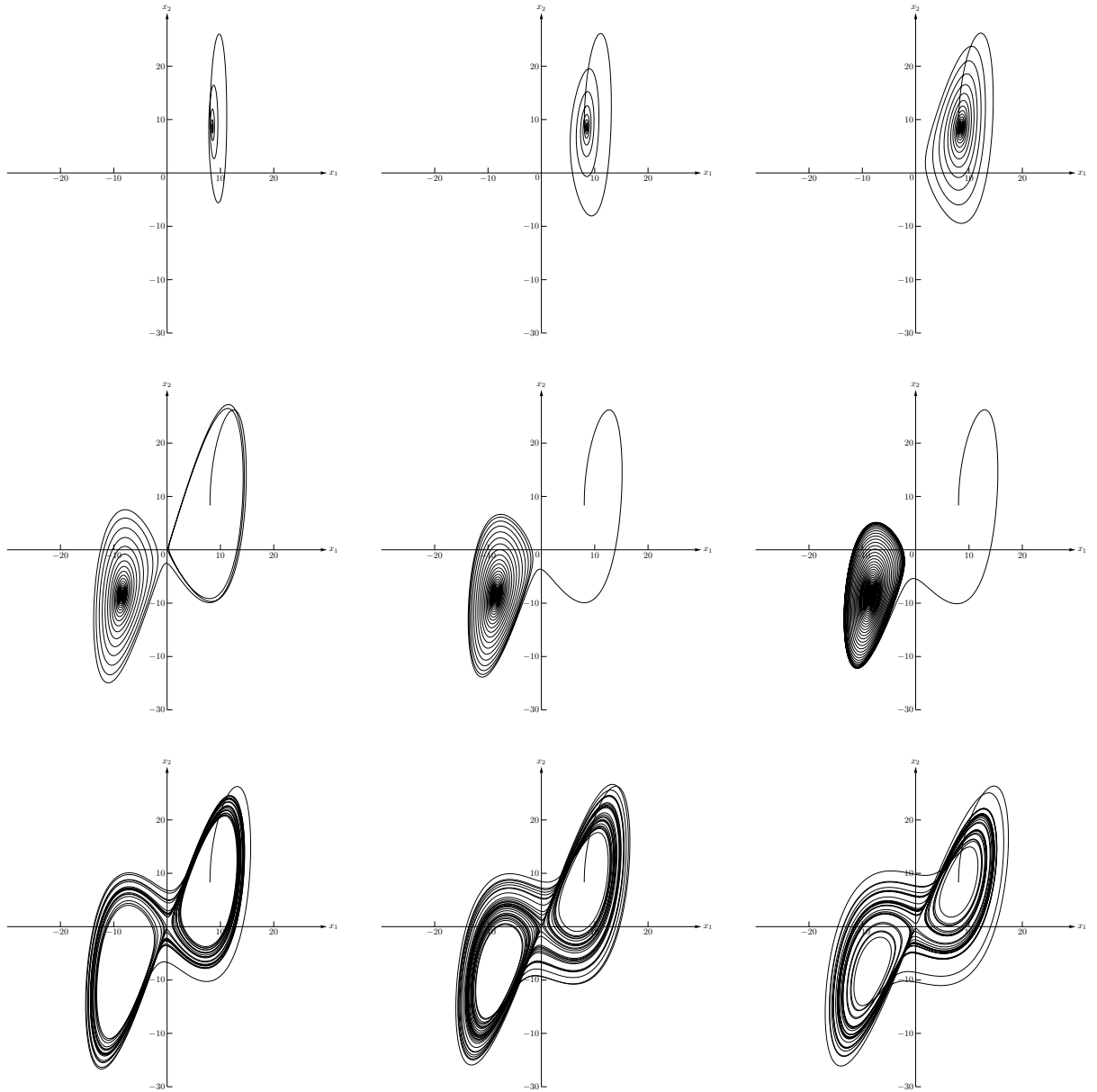


Figura 1.2: Trayectorias en el sistema de Lorenz, (ver 3.2.1), para valores de  $\sigma$  de izquierda a derecha y de arriba abajo: 1, 2, 3, 3.25, 3.5, 3.75, 4, 5, 6. Simulado con M4 y  $\text{circuit-macros}$ ; Euler con  $\Delta t = 0.005$ .

Sin embargo, bajo determinados valores del vector de parámetros  $\mathbf{p}$ , la solución o trayectoria calculada para el sistema (1.1) puede mostrar un comportamiento extraño e impredecible como el que describió Lorenz en 1963 [Lorenz (1963)], con una extraordinaria riqueza dinámica como se muestra en la figura 1.3.

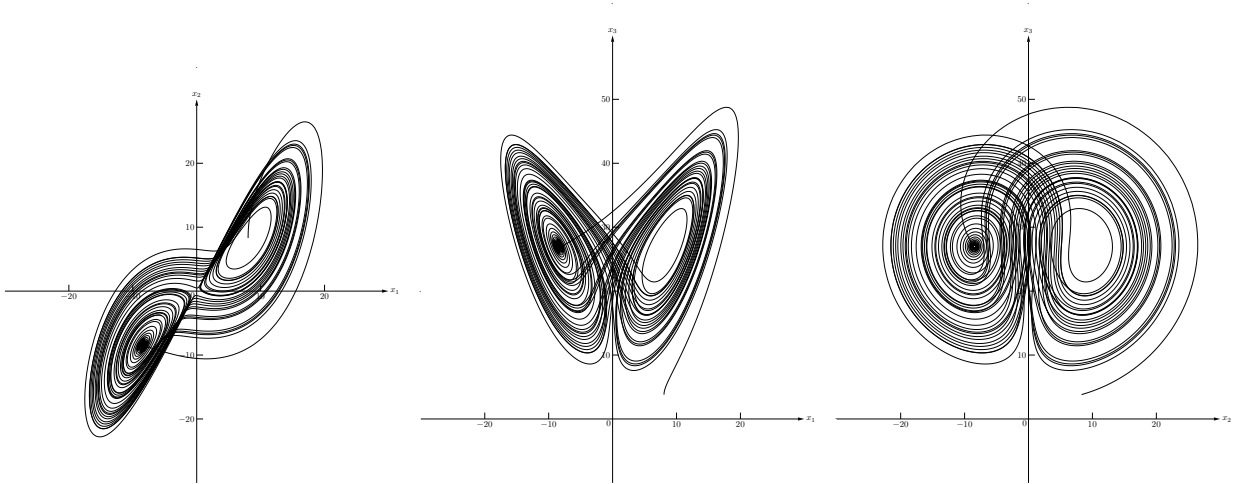


Figura 1.3: Bifurcaciones y Caos en el sistema de Lorenz para  $\sigma = 10$ , (ver 3.2.1). Proyecciones bidimensionales del atractor.

*Simulado con M4 y circuit-macros; Euler con  $\Delta t = 0.005$ .*

Entonces, estos comportamientos complejos van desde las **bifurcaciones**, que como se ha señalado resultan porque pequeñas variaciones en los parámetros del sistema pueden originar cambios bruscos en las trayectorias, hasta el **caos**, un comportamiento que muestra gran **sensibilidad a las condiciones iniciales**, y al que se puede llegar a través de **bifurcaciones permanentes** que dan lugar a **múltiples órbitas inestables** (“Unstable periodic orbits”, UPOs) inmersas en el **atractor caótico**, lo que impide la predicción a largo plazo en situación de caos.

Estos comportamientos se observan incluso en sistemas de baja dimensión [Wiggins (2003)], como los tratados en esta memoria, descritos por modelos de sólo tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Hay que señalar que, sin embargo, existen sistemas dinámicos que no presentan bifurcaciones ni caos para un amplio rango de valores de los parámetros.

### 1.4.1. Estabilidad de los equilibrios y sus bifurcaciones

Para poder caracterizar las bifurcaciones que se generan desde las situaciones de equilibrio, a continuación se recuerdan algunos conceptos relacionados con la estabilidad de los equilibrios y de las trayectorias en los sistemas dinámicos (adaptadas de [Guckenheimer y Holmes (1983), Khalil (1995), Hoppensteadt (2000)]).

En el sistema dinámico (1.1), si se muestra explícitamente la variable  $t$  de la dinámica que representa el tiempo físico y  $\mathbf{F}_p$  es la función no lineal especificada para ciertos valores del vector de parámetros  $p$ , entonces se puede escribir (1.2),:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}_p(t, \mathbf{x}) \quad (1.2)$$

Sea  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$  la solución o trayectoria dinámica, que satisface la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ , y en la que las componentes de  $\mathbf{F}_p$  son funciones suaves en  $t$  y un mínimo de dos veces continuamente diferenciables. Cuando  $\mathbf{F}_p(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , se tendrá que  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$  para cada  $t > t_0$  y se dice que  $\mathbf{0}$  es un **equilibrio** (trivial) del sistema. Nótese que un adecuado cambio de variables puede llevar cualquier estado  $\mathbf{x}^*$  al origen  $\mathbf{0}$ , por lo que  $\mathbf{x}^*$  es entonces un equilibrio (no trivial) pero sus propiedades pueden estudiarse en el origen.

1. La solución o trayectoria dinámica  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  se dice **inestable** si no es estable.
2. La solución  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  se dice **estable** si dado cualquier instante inicial  $t_0$  y un cierto estado cercano al equilibrio  $\mathbf{x}_\varepsilon \neq \mathbf{0}$ , existe una cota o restricción para la trayectoria dada por otro estado  $\mathbf{x}_\delta(t_0, \mathbf{x}_\varepsilon)$  tal que la solución  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$  existe para todo  $t > t_0$  y permanece dentro de la cota establecida, esto es,  $\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \|\mathbf{x}_\delta\|$  para todo  $t > t_0$ . Esto significa que la trayectoria dinámica se desarrollará alrededor de  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  si se inicia “cerca” de esta solución de equilibrio.

3. La solución  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  se dice ***asintóticamente estable*** si es estable y si existe una cota o restricción dada por un estado  $\|\mathbf{x}_{\delta_1}(t_0, \mathbf{x}_\varepsilon)\| > \mathbf{0}$  tal que si la condición inicial  $\|\mathbf{x}_0\| < \|\mathbf{x}_{\delta_1}(t_0, \mathbf{x}_\varepsilon)\|$  implica que la trayectoria  $\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Esto significa que la solución  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es un equilibrio estable y si la trayectoria se inicia “cerca” de este equilibrio, se aproximará a él asintóticamente. La *cuenca de atracción* de un equilibrio asintóticamente estable la forma el conjunto de condiciones iniciales  $\{\mathbf{x}_0\}$  tales que, cualquier trayectoria  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$  llega a él cuando  $t \rightarrow \infty$ .

4. La solución  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  se dice ***uniformemente asintóticamente estable*** si es estable y si su restricción al estado dinámico  $\mathbf{x}_\delta$  es independiente de la fecha de origen de la dinámica  $t_0$  y si desde el estado  $\mathbf{x}_\varepsilon \neq \mathbf{0}$  hay un intervalo de tiempo  $t - t_0 > \tau(\mathbf{x}_\varepsilon)$ , con  $\tau(\mathbf{x}_\varepsilon) > 0$  tal que la trayectoria origina estados dinámicos que nunca superan a  $\mathbf{x}_\varepsilon$ , es decir,  $\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \|\mathbf{x}_\varepsilon\|$ . Entonces,  $\mathbf{x}$  se aproxima a  $\mathbf{0}$  uniformemente desde  $t_0$  y  $\mathbf{x}_0$ .

5. La solución  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$  se dice ***exponencialmente asintóticamente estable*** si es asintóticamente estable y si dentro de una restricción al estado dinámico  $\mathbf{x}_\delta$ , existen las matrices constantes  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{A}$ , tales que:

$$\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \mathbf{K}e^{-\mathbf{A}(t-t_0)}\|\mathbf{x}_0\| \quad \text{para todo } t > t_0.$$

6. La solución  $\mathbf{x}_c \equiv \mathbf{0}$  se dice ***estable bajo perturbaciones persistentes*** si para un cierto estado cercano al equilibrio  $\mathbf{x}_{c\varepsilon} \neq \mathbf{0}$ , existen dos cotas, la primera para el estado inicial  $\mathbf{x}_{\delta_1}$ , y la segunda, para la amplitud de la perturbación  $\mathbf{x}_{\delta_2}$ , tales que:

a) para cualquier estado inicial  $\mathbf{x}_{c0}$  tal que  $\|\mathbf{x}_{c0}\| < \mathbf{x}_{\delta 1}$  y

b) para cualquier función de perturbación admisible continuamente diferenciable en las componentes de  $\mathbf{x}$  e integrable en  $t$  (en el sentido de Lebesgue),  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}_c)$  que satisface  $\|\mathbf{u}(t, \mathbf{x}_c)\| < \|\mathbf{x}_{\delta 2}\|$  para todo  $t_0 \leq t < \infty$ , con  $\mathbf{x}_c$  cercano a la situación de equilibrio  $\mathbf{x}_c = \mathbf{0}$ , la solución del sistema perturbado (o continuamente controlado):

$$\frac{d\mathbf{x}_c}{dt} = \mathbf{F}_p(t, \mathbf{x}_c) + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}_c)$$

que satisface la condición inicial  $\mathbf{x}_c(t_0) = \mathbf{x}_{c0}$ , se mantiene en la cercanía del equilibrio limitada por  $\mathbf{x}_{c\epsilon}$ , es decir:  $\|\mathbf{x}_c(t)\| < \|\mathbf{x}_{c\epsilon}\|$  para todo  $t_0 \leq t < \infty$ , y donde el vector  $\mathbf{u}$  representa las perturbaciones permanentes inherentes a todo sistema y a su entorno, aunque en un sentido amplio, también pueden incluirse las perturbaciones externas o forzantes, propias de un sistema de control por realimentación del estado.

La estabilidad bajo perturbaciones persistentes se denomina a veces estabilidad total. Establece que añadiendo pequeñas y posiblemente erráticas perturbaciones al sistema original cambiarán las soluciones, pero si el sistema es totalmente estable, estas soluciones están próximas a  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

En general, para encontrar los estados de equilibrio  $\mathbf{x}^*$  del sistema (1.1), debe resolverse la ecuación que resulta de anular su lado derecho  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ , de manera que habrá distintos puntos de equilibrio según el valor de los parámetros  $\mathbf{p}$ .

Para estudiar la estabilidad de cada uno, se analizan los autovalores de la matriz Jacobiana del modelo linealizado evaluada en cada equilibrio  $\mathbf{x}^*$ :

$$\mathcal{J} = \left( \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

En el análisis de sistemas multiparamétricos, es habitual estudiar la influencia de cada parámetro por separado, así la complejidad del problema se rebaja enormemente. Por ello, en adelante, si  $p_i$  es la componente del vector de parámetros  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_p]^T$ , considerada en cada análisis particular de bifurcaciones, para simplificar la notación se le denotará genéricamente por  $p \in R^2$ .

En estos casos, si al variar lentamente este único parámetro se generan bifurcaciones, éstas se denominan **bifurcaciones estáticas** [Chen (1999), Chen *et al* (2000), Boccaletti *et al* (2000), Ogorzalek (1993b), Andrievskii y Fradkov (2003), González-Miranda (2004)].

La figura 1.4, muestra la evolución de cada variable de estado  $x_1, x_2$  o  $x_3$ , en el sistema de Lorenz (ver 3.2.1), según el valor del parámetro de bifurcación  $\sigma$ , manteniendo fijos los otros dos parámetros ( $\beta = 8/3, \rho = 28$ ).

Los diagramas se obtuvieron representando, para cada valor del parámetro  $\sigma$  –que se hace variar entre 1 y 6 con incrementos de  $1/6 \times 10^{-3}$ – el valor de cada variable de estado después de 8000 iteraciones con un paso de integración de  $\Delta t = 0.002$ , partiendo siempre de las mismas condiciones iniciales ( $x_1(0) = 8,04$ ,  $x_2(0) = 8,30$ ,  $x_3(0) = 3,81$ ).

Se puede apreciar el cambio del equilibrio estable finalmente alcanzado y las zonas donde se producen bifurcaciones permanentes y caos. Nótese la correspondencia con los comportamientos mostrados en la figura 1.2. Obsérvese también que, con las condiciones del ensayo, no está claro que se produzca la llegada al caos mediante una cascada de desdoblamientos periódicos.

---

<sup>2</sup>Es decir,  $p = p_i$ .



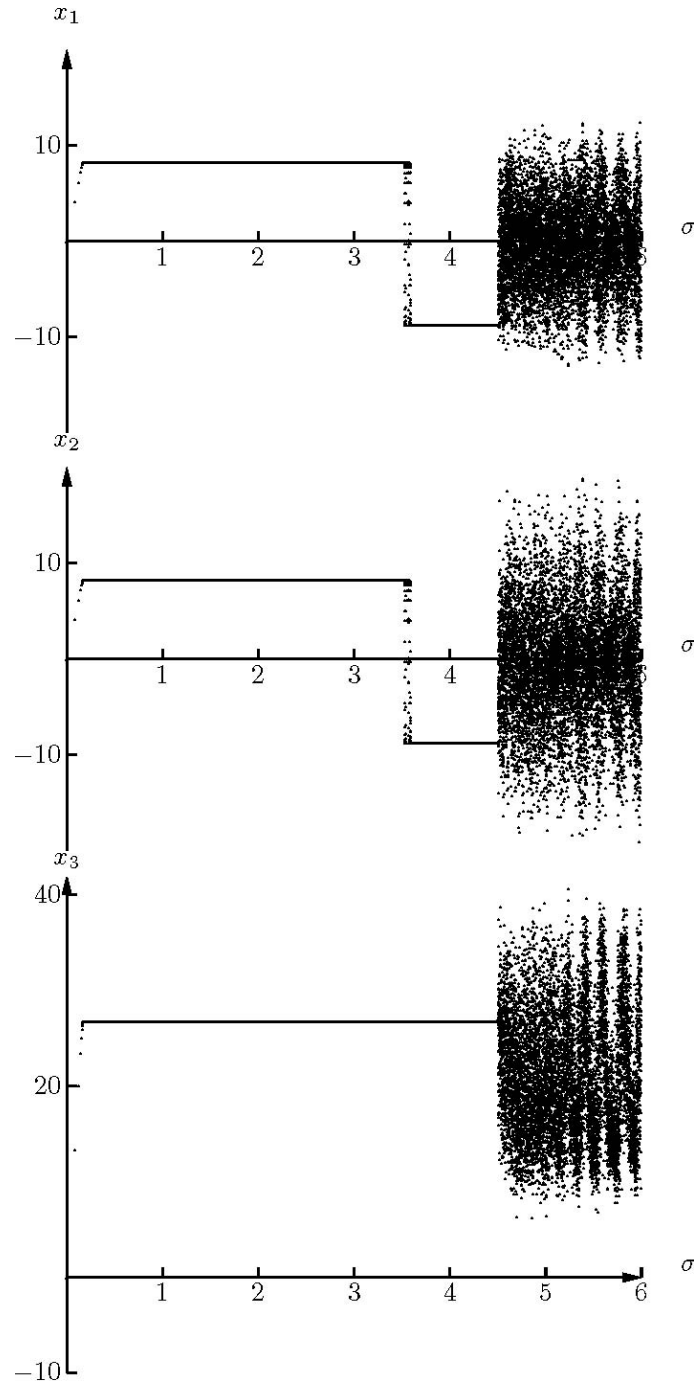


Figura 1.4: Valores de las componentes del sistema de Lorenz (ver 3.2.1) tras 16 segundos de simulación, según el valor del parámetro  $\sigma$  con las mismas condiciones iniciales en cada caso.

*Simulado con M4 y circuit-macros; Euler con*

$\Delta t = 0.002$ .

Al estudiar el carácter de cada uno de los equilibrios de un sistema dinámico,

si el equilibrio considerado  $\mathbf{x}^*$ , para un cierto valor  $p_0$  del parámetro  $p$ , resulta estable (respectivamente inestable) y lo es también para otros valores del  $p < p_0$  y, para  $p > p_0$  el carácter del equilibrio cambia a inestable (respectivamente estable), entonces se dice que  $p_0$  es **valor de bifurcación para el equilibrio considerado** y que  $(\mathbf{x}^*, p_0)$  es un **punto de bifurcación del equilibrio** en el espacio de parámetros  $R^n \times R$ . Este tipo de bifurcación en un equilibrio, donde al variar el parámetro no cambia el número de soluciones o puntos de bifurcación, se denomina **bifurcación transcritical** [Guckenheinmer y Holmes (1983), Chen *et al* (2000)].

Si únicamente tiene sentido físico que el vector de parámetros  $p$  alrededor de un punto de bifurcación  $(\mathbf{x}^*, p_0)$ , pueda variar sólo en una determinada dirección, por ejemplo  $p > p_0$ , y para estos valores de  $p$  se obtienen dos nuevos conjuntos de equilibrios  $\mathbf{x}_1^*$  y  $\mathbf{x}_2^*$  con distinto carácter de estabilidad (variedades estable e inestable), la bifurcación del equilibrio se denomina bifurcación en silla o **bifurcación saddle** [Guckenheinmer y Holmes (1983), Chen *et al* (2000)].

Si el equilibrio estudiado  $\mathbf{x}^*$ , para un cierto valor  $p_0$  del vector de parámetros, resulta también estable para  $p < p_0$  y sin embargo, para  $p > p_0$ , se obtienen dos nuevos conjuntos de equilibrios  $\mathbf{x}_1^*$  y  $\mathbf{x}_2^*$  con distinto carácter de estabilidad (variedades estable e inestable), y los estados de la variedad estable son simétricos para el mismo valor del vector de parámetros mientras que la variedad inestable sólo contiene a  $\mathbf{x}^*$  para cualquier  $p > p_0$ , la bifurcación que se produce alrededor del punto de bifurcación  $(\mathbf{x}^*, p_0)$  se denomina bifurcación en tridente o **bifurcación pitchfork** [Guckenheinmer y Holmes (1983), Chen *et al* (2000)].

En la figura 1.5 se tiene un **diagrama de bifurcaciones de los equilibrios** del sistema de Lorenz (ver 3.2.1) en el que el parámetro de bifurcación es  $\rho$ , manteniéndose fijos los otros dos parámetros de bifurcación ( $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ ).

Al hacer variar el parámetro de bifurcación  $\rho$  entre 0.1 y 30 con incrementos de  $1 \times 10^{-3}$ , el diagrama muestra el cambio en la norma del vector de estado  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ , obtenida después de 100000 iteraciones con paso de integración

$\Delta t = 0.001$ , partiendo desde las mismas condiciones iniciales ( $x_1(0) = 8,04$ ,  $x_2(0) = 8,30$ ,  $x_3(0) = 3,81$ ).

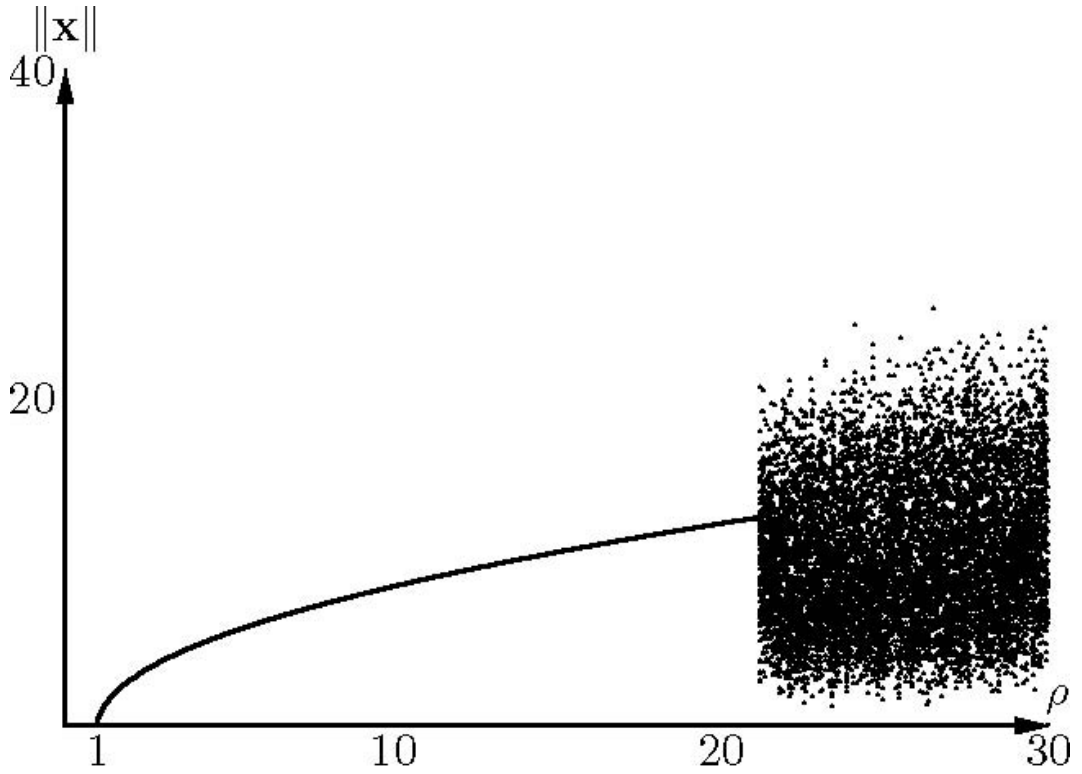


Figura 1.5: Diagrama de bifurcaciones en el sistema de Lorenz según el valor del parámetro  $\rho$ , (ver 3.2.1).

*Simulado con M4 y circuit-macros; Euler con  $\Delta t = 0.001$ .*

En dicha figura 1.5 se observa que en  $\rho = 1$  el origen deja de ser estable y se produce una bifurcación en ese equilibrio pues cambia su carácter (de estable a inestable), las trayectorias ya no convergen al origen sino a otro equilibrios estable. Puede apreciarse que estas situaciones de equilibrio estable cambian con  $\rho^3$  y, también, que a partir de un cierto valor de este parámetro de bifurcación  $\rho^4$ , se produce una brusca transición a una situación de bifurcaciones permanentes (oscilaciones caóticas) en las trayectorias.

Una **bifurcación de Hopf o bifurcación dinámica** [Guckenheimer y Hol-

<sup>3</sup> $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$  [Guckenheimer y Holmes (1983), Dang (2006)].

<sup>4</sup>Una bifurcación de Hopf en  $\rho_H = \sigma(\sigma + \beta + 3)/(\sigma - \beta - 1)$  [Dang (2006)].

mes (1983), Chen *et al* (2000)], se produce cuando al variar el vector de parámetros  $p$ , la matriz Jacobiana del sistema presenta un par de autovalores complejos conjugados que se mueven y cruzan el eje imaginario (ver figura 1.6), mientras que el resto de autovalores permanecen en la región estable. En el punto de cruce, la parte real de los autovalores se hace cero y alrededor del equilibrio  $\mathbf{x}^* = 0$ , surge un ciclo límite para el valor crítico del parámetro  $p = p_0$ , como muestra la figura 1.6.

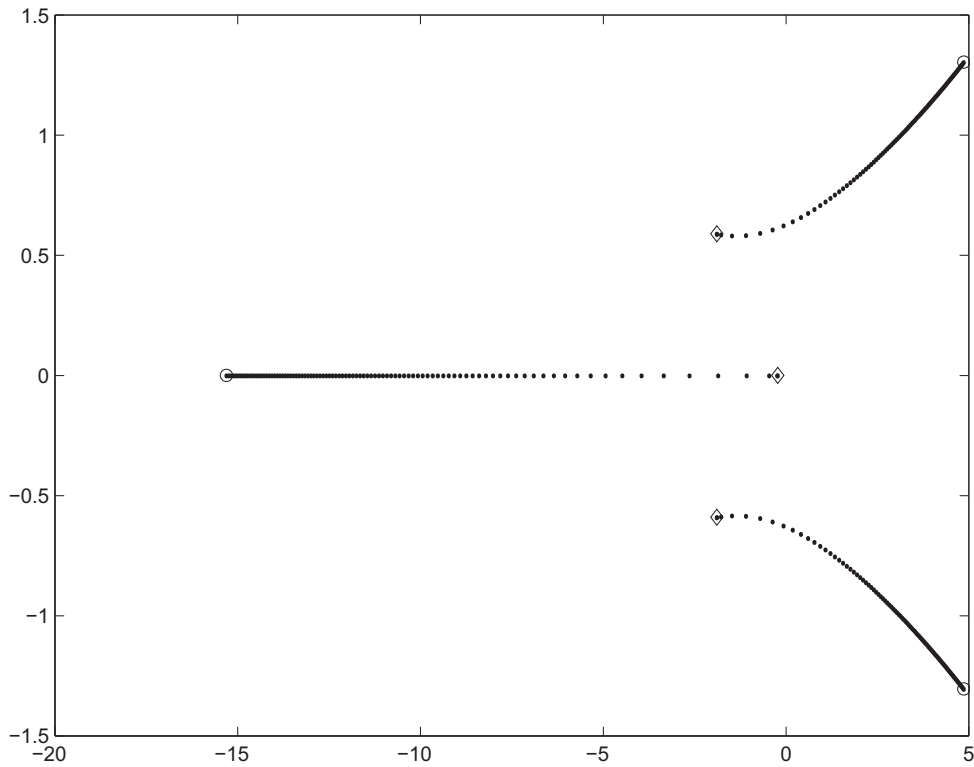


Figura 1.6: Autovalores en el oscilador de Colpitts según el valor del parámetro  $V_{EE}$  (ver 3.2).

El análisis de esta bifurcación se inició con los trabajos pioneros de Poincaré y Andronov-Hopf, que establecieron el siguiente teorema [Chen *et al* (2000)]:

**Teorema de Poincarè y Andronov-Hopf.**

Supóngase que el sistema bidimensional

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2; p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2; p)\end{aligned}$$

tiene un punto de equilibrio en el origen  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$  y que la matriz Jacobiana asociada tiene un par de autovalores imaginarios puros dados por las funciones  $\lambda(p)$  y  $\bar{\lambda}(p)$ . Si

$$\left. \frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda(p))}{\partial p} \right|_{p=p_0} > 0$$

para cierto valor crítico  $p_0$  del parámetro, entonces:

- (i)  $p = p_0$  es un valor de bifurcación en el sistema;
- (ii) para valores cercanos por el lado izquierdo  $p < p_0$  el equilibrio en el origen  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$  es asintóticamente estable;
- (iii) para valores cercanos por el lado derecho  $p > p_0$  el equilibrio en el origen es inestable;
- (iv) para valores suficientemente cercanos pero con  $p \neq p_0$ ; el equilibrio en el origen es rodeado por un ciclo límite de amplitud  $\mathcal{O}(\sqrt{|(p - p_0)|})$ .

La bifurcación de Hopf se denomina **supercrítica** si el equilibrio pasa de estable a inestable y **subcrítica** si el equilibrio cambia de inestable a estable. Por extensión, este carácter de supercrítica y subcrítica se le aplica también a las bifurcaciones estáticas.

Cuando se produce la bifurcación en un sistema real multiparamétrico, llegar a controlarla significa lograr diseñar y realizar un controlador que, partiendo de las medidas disponibles, modifique las propiedades de la dinámica resultante

del punto de bifurcación que, por alguna razón o causa<sup>5</sup> se ha producido en el sistema no lineal real a controlar y conseguir, en éste, el comportamiento dinámico deseado [Chen *et al* (2000)].

***El control de una bifurcación en un sistema multiparamétrico*** no es entonces solamente un problema importante por sí mismo, sino que sus métodos pueden considerarse análogos<sup>6</sup> a los empleados en otro problema<sup>7</sup>: ***el control del caos determinista***, en el que se considera la permanente presencia de bifurcaciones, ya sea por la típica ruta hacia el caos que representa la cadena de desdoblamientos periódicos, ya sea por la irrupción de intermitencias, saltos y otros comportamientos extraños que conducen al caos [Chen *et al* (2000)].

En [Yang *et al* (2013)], los autores estudian un modelo de oscilador forzado de Van der Pol-Duffing multiparamétrico (ver 3.5), muestran la existencia de rutas directas e inversas de desdoblamientos periódicos desde el caos a la periodicidad y viceversa junto a otras rutas de bifurcaciones que llevan al caos; consideran también como se presentan diferentes regiones caóticas en las que aparecen ventanas con multi-periodicidad o  $n$ -periodicidad, con  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 19, 21, 25, 29, 31, 37, 41 \dots$ , así como la ruptura de la simetría en las órbitas periódicas. Señalan, además, cómo la dinámica del sistema puede abandonar la región caótica hacia el movimiento periódico ajustando su conjunto de parámetros  $\{a_0, a_1, b, c, A\}$ , lo que puede ser considerada una estrategia de control del caos y de las bifurcaciones en un sistema multiparamétrico.

---

<sup>5</sup>Como se ha visto, en el análisis de sus modelos matemáticos, *la causa* de la bifurcación se asocia a la idea de que ligeros cambios en el vector de parámetros, del sistema dinámico que representa al sistema real, modifican el carácter estabilidad de sus equilibrios.

<sup>6</sup>En [Chen *et al* (2000)], se señala esta proximidad empleando el término “*emparejados*” (“*twins*”).

<sup>7</sup>Nótese el uso conjunto e inseparable de las palabras *bifurcations and chaos* en muchos artículos, libros y revistas.

## 1.5. Sobre el control del caos determinista

En general, una gran cantidad de los problemas de control relacionados con el caos [Andrievskii y Fradkov (2003), Boccaletti *et al* (2000), Chen *et al* (2000), Ogorzalek (1993a), Ogorzalek (1993b)] pueden considerarse separables en tres tipos: 1) la estabilización en un estado de equilibrio o en una órbita inicialmente inestable (control de las bifurcaciones permanentes); 2) la generación de oscilaciones caóticas (el comportamiento caótico es el objetivo deseado), y 3) la sincronización de dos o mas sistemas caóticos.

Para el primer grupo, la ingeniería de control ofrece diferentes enfoques, analizados en muchos trabajos (ver [Jing *et al* (2015), Souza y Amorin (2011), Prian *et al.*(2015), Macau *et al* (2008), Pyragas *et al* (2004), López *et al* (2007), Boccaletti *et al* (2000), Andrievskii y Fradkov (2003)], y sus referencias), pero la naturaleza no predecible del comportamiento caótico dificulta el diseño de controladores. En general, las distintas estrategias aprovechan la coexistencia en el atractor de multiples órbitas periódicas inestables (UPOs), ocasionadas por bifurcaciones permanentes , consideradas condiciones de operación candidatas [Abed *et al* (1995)] bajo control.

Aunque no en todos los métodos, puede decirse que una estrategia generalizada para el control de órbitas inestables es realizar la tarea en dos etapas [Souza y Amorin (2011)]. La primera es la de adquisición y procesamiento de datos y análisis de los mismos <sup>8</sup>, donde tiene lugar la identificación de la UPO y donde se eligen los parámetros de control. La segunda etapa correspondería a la estabilización de la órbita según los procedimientos o algoritmos que cada método particular imponga. Así, como ya se ha adelantado, ***el problema del control de estas bifurcaciones permanentes se puede interpretar (en algunos casos) como un problema de control del caos.***

Hay que resaltar que el problema del control del caos no suele tratarse con

---

<sup>8</sup>“Aprendizaje” de las características de la dinámica particular.

los métodos habituales utilizados en la ingeniería de control de procesos, sino que se emplean otros enfoques que tienen presente las peculiares características de la dinámica caótica, ya que puede ocurrir que la inestabilidad local que caracteriza el complejo comportamiento caótico puede ser el resultado de la presencia del propio controlador [Chen *et al* (2000)]. En efecto, sin un adecuado sistema de medida que genere información útil (por ser ruidoso, impreciso, lento, con ancho de banda limitado, con amplitudes limitadas, etc.), el controlador diseñado para el problema lineal puede mover los polos de trabajo en lazo cerrado mas allá de los límites de estabilidad, y aunque muchas veces la salida del sistema no crece exponencialmente, aparecen ciclos límites de gran amplitud, generalmente no deseados, u otras formas de bifurcación [Chen *et al* (2000)].

Los sistemas que muestran comportamiento caótico considerados en esta memoria y su control pueden representarse por un conjunto de ecuaciones de estado como en (1.1), pero incluyendo la acción de control  $\mathbf{u}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, p, \mathbf{u}) \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{x} \in R^n$  es el vector  $n$ -dimensional de estado,  $p \in R^{n_p}$  es el vector  $n_p$ -dimensional de parámetros del sistema,  $\mathbf{u} \in R^{n_u}$  es el vector  $n_u$ -dimensional de entradas de control y  $\mathbf{F}$  es una función vectorial no lineal.

Generalmente, la acción de control se añade aditivamente en el lado derecho de la ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, p) + \mathbf{G}(\mathbf{u})$$

y, también el caso particular:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, p) + \mathbf{G}(\mathbf{x})u$$



que corresponde a un sistema afín respecto a la  $u$ <sup>9</sup>. Los distintos métodos de control actúan modificando el vector de estado  $\mathbf{x}$ , el vector de parámetros  $p$ , o el vector de entradas de control  $\mathbf{u}$ .

### 1.5.1. Métodos de control basados en eventos discretos

El primer método de control discreto reconocido como tal, se publica en 1990, cuando Ott, Grebogi y Yorke (OGY) [Ott *et al* (1990)] mostraron como pequeñas perturbaciones en los parámetros de un sistema con comportamiento caótico, pueden estabilizarlo en las proximidades de una órbita periódica inestable (*unstable periodic orbit*, UPO), considerada ésta una condición de operación candidata o *set-point* [Abed *et al* (1995), Andrievskii y Fradkov (2003), Boccaletti *et al* (2000)].

Estos métodos se basan en el uso de la *sección de Poincarè* para sistemas dinámicos autónomos como el descrito en (1.1), definida como [Parker y Chua (1989)] una hipersuperficie transversal  $\Sigma_P$  a la solución o trayectoria dinámica (en adelante se usará uno u otro término como sinónimos),  $\Gamma(t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, p)$ , en un cierto estado  $\mathbf{x}_j$  de la misma.

En la hipersuperficie  $\Sigma_P$  se genera la *aplicación de Poincaré*, entendida como la secuencia de impactos  $\mathbf{x}_j^{n+1} = \mathcal{P}(\mathbf{x}_j^n, \mathbf{p}^n)$  [Souza y Amorin (2011), Andrievskii y Fradkov (2003), Boccaletti *et al* (2000), Chen *et al* (2000)]. Estos impactos serán distintos, puesto que la naturaleza caótica del sistema implica infinidad de órbitas inestables inmersas en el atractor caótico. La elaboración del control, en el método OGY, reside en añadir aditivamente al vector de parámetros  $\mathbf{p}^n$  una pequeña perturbación  $\delta^n(\mathbf{p}^n)$ .

Bajo control, es decir con un vector de parámetros:

---

<sup>9</sup>La forma de control considerada en lo que sigue (ver sección 2.2), puede considerarse un caso particular de sistema afín respecto al control.

$$\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^* + \delta^n(\mathbf{p}^n) \quad (1.4)$$

si la trayectoria  $\Gamma_c(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{p}^n)$  de la evolución dinámica del sistema en el espacio de estados cruza la sección de Poincaré, la secuencia de puntos de cruce  $\mathbf{x}_j^n$  tendrá, bajo el comportamiento periódico deseado, un punto de equilibrio ahora estabilizado  $\mathbf{x}_c^*$  para un cierto valor del vector de parámetros  $\mathbf{p}^*$ . La acción de control  $\delta^n(\mathbf{p}^n)$  se aplica sólo dentro de cierta vecindad de este equilibrio  $\mathbf{x}_c^*$ , y depende de la separación al mismo  $(\mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_c^*)$ .

Para la determinación de la acción de control  $\delta^n(\mathbf{p}^n)$ , se considera la versión linealizada (véanse [Chen (1999), Souza y Amorin (2011)] y sus referencias) del sistema dinámico (1.1) en la vecindad del punto de equilibrio  $\mathbf{x}_c^*$ , dada por:

$$\Delta \mathbf{x}_j^{n+1} = \mathcal{J}^n \Delta \mathbf{x}_j^n + \mathcal{W}^n \Delta \mathbf{p}^n$$

donde  $\Delta \mathbf{x}_j^{n+1} = (\mathbf{x}_j^{n+1} - \mathbf{x}_c^*)$  representa la próxima desviación del estado en la superficie de impacto  $\Sigma_P$ , que es calculada a partir de la desviación actual del estado  $\Delta \mathbf{x}_j^n = (\mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_c^*)$  y de la desviación actual del vector de parámetros  $\Delta \mathbf{p}^{n+1} = (\mathbf{p}^n - \mathbf{p}^*)$ , según sean la matriz jacobiana  $\mathcal{J}$  y la matriz de sensibilidad de los parámetros  $\mathcal{W}$  definidos por:

$$\mathcal{J}^n = \left. \frac{\partial(\cdot)}{\partial(x_i^n)} \mathcal{P}(\mathbf{x}_j^n, \mathbf{p}^n) \right|_{\mathbf{x}_j^n = \mathbf{x}_c^*, \mathbf{p}^n = \mathbf{p}^*}$$

$$\mathcal{W}^n = \left. \frac{\partial(\cdot)}{\partial(p_i^n)} \mathcal{P}(\mathbf{x}_j^n, \mathbf{p}^n) \right|_{\mathbf{x}_j^n = \mathbf{x}_c^*, \mathbf{p}^n = \mathbf{p}^*}$$

Esta linealización es topológicamente conjugada<sup>10</sup>, con el problema no lineal, como asegura el Teorema de Hartman-Grobman<sup>11</sup> [Souza y Amorin (2011)].

La aplicación lineal que define  $\mathcal{J}^n$  deforma una hiperesfera (véanse [Souza y Amorin (2011)] y sus referencias) alrededor de  $\mathbf{x}_j^n$  en un hiperelipsoide alrededor del próximo punto de impacto  $\mathbf{x}_j^{n+1}$ . Por tanto una descomposición de  $\mathcal{J}^n$  en sus valores singulares  $\sigma_s^n$  y  $\sigma_u^n$ , puede utilizarse para obtener las direcciones de las variedades estable  $\nu_s^n$  e inestable  $\nu_u^n$  de la aplicación en el impacto  $n$ -ésimo y transformarla sobre los semiejes mayor  $\sigma_u^n u_u^n$  y menor  $\sigma_s^n u_s^n$  del elipsoide del próximo impacto, es decir:

$$\mathcal{J}^n = (u_u^n u_s^n) \begin{pmatrix} \sigma_u^n & 0 \\ 0 & \sigma_s^n \end{pmatrix} (\nu_u^n \nu_s^n)^T$$

Aunque se han desarrollado algoritmos de gran eficacia computacional para el cálculo de la perturbación  $\delta^n(\mathbf{p}^n)$  a partir de la transformación anterior para la dirección estable, el tiempo de cómputo junto con la elección de la superficie de Poincaré  $\Sigma_P$  adecuada para que la trayectoria no deje de visitarla, así como la necesidad de calcular previamente el equilibrio  $\mathbf{x}_c^*$  a estabilizar en ella, resultan ser los principales inconvenientes prácticos del método.

Del método OGY han surgido diferentes variantes [Andrievskii y Fradkov (2003), Boccaletti *et al* (2000), Chen (1999)], y generalizaciones, como las técnicas

<sup>10</sup>**Concepto de conjugación topológica:** [Guckenheimer y Holmes (1983)] Un campo vectorial  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^1$  en  $R^n$  tal que  $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  se dice localmente topológicamente conjugado a su linealización en el origen  $\mathbf{A} := \mathcal{J}(\mathbf{0})$  si  $\exists$  un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  en la vecindad del origen, tal que los flujos de los campos  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{A}$  son localmente conjugados por  $h$ :

$$h(\Gamma(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x}_0)) = e^{t\mathbf{A}} h(\mathbf{x}_0)$$

con  $\mathbf{x} \in U$ ;  $U, V \in R^n$ , y ambos lados de la ecuación estén definidos.

<sup>11</sup>**Teorema de Grobman-Hartman** [Guckenheimer y Holmes (1983)]: Sea  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  definido en  $R^n$  tal que  $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ; si la linealización  $\mathbf{A}$  de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  en el origen es hiperbólica, entonces,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  es topológicamente conjugado a  $\mathbf{A}$  en el origen. La matriz  $\mathbf{A}$  se dice hiperbólica si ninguno de sus autovalores tiene parte real nula.

de limitación dinámica (*dynamic limiting*) [Corron *et al* (2002)], las técnicas de control de pico a pico (PPD, *Peak to Peak Dynamics*) [Candaten y Rinaldi (2000), Piccardi y Rinaldi (2000), Piccardi y Rinaldi (2003)].

Entre las técnicas que se inspiran en el método OGY destaca la técnica de control ocasional por realimentación proporcional (OPF, ***Occasional Proportional Feedback***), presentada por Hunt en un montaje experimental [Hunt (1991)]. Se trata de una modificación del método OGY que presenta ciertas ventajas, pues permite establecer un intervalo de valores de la amplitud de la señal medida (*window*) mejor que un único valor (el que definiría la superficie de Poincaré a utilizar), para decidir *ocasionalmente* la aplicación de la señal de control, *a la vez que establece un límite a la duración de la intervención del control*.

El control es proporcional a la desviación de la señal caótica  $y_j$  respecto al valor central de la ventana  $y^*$ , por lo que, a diferencia del método OGY, esta señal de control puede tomar valores altos, pues la máxima desviación es proporcional a la amplitud de la ventana y a la ganancia de realimentación, ambas ajustables experimentalmente [Hunt (1991), Hunt y Johnson (1993), Ogorzalek (Unesco EOLSS)].

### 1.5.2. Control impulsivo

Matías y Güémez [Güemez y Matias (1993), Matias y Güémez (1994)], propusieron una forma de control por impulsos basada en una perturbación instantánea y periódica de las variables de estado según:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j(1 + \gamma)$$

Mediante el adecuado ajuste experimental de los dos parámetros, la amplitud  $\gamma$  (positiva o negativa) y el periodo  $T$  de aplicación de la perturbación, ambos

determinables experimentalmente, mostraron que se logra en el sistema caótico un comportamiento periódico o la llegada a un punto de equilibrio.

Nótese que se trata de *una sustitución instantánea del estado*<sup>12</sup> cada  $j$ <sup>13</sup> segundos<sup>14</sup>, por lo que *en un sentido amplio, el control impulsivo puede ser considerado un tipo de control por eventos, en el que los eventos tienen lugar de forma periódica.*

Además, estos autores encontraron [Guemez y Matias (1993), Matias y Güemez(1994)], una interesante relación empírica  $\mathcal{C} = \gamma/T$  entre la amplitud de la perturbación y su periodicidad.

Entre los numerosos trabajos que han estudiado problemas de control o sincronización por impulsos, (considerados éstos como una señal externa forzante con decaimiento exponencial), pueden destacarse de los de Yang [Yang(1999)], Tian [Tian y Yu (2003), Tian *et al* (2004)], también los de Prian [Prian *et al* (2009), Prian *et al.*(2011), Prian *et al* (2012), Prian *et al.*(2015)], y entre otros muchos, los de D.L Piro *et al.* [González y Piro (1984)], H.A. Larrondo *et al.*, [Larrondo *et al.*(1996)].

### 1.5.3. Métodos de control basados en retardos “time delay”

Aunque no fue el primero de los métodos de control del caos que se desarrolló, un método de control muy estudiado y extendido fue presentado por Pyragas [Pyragas (1992)]. Se considera que el sistema caótico puede representarse como en (2.2.2). Para la determinación de la acción de control  $u(t)$  el método se basa en la comparación del estado del sistema en cada instante  $x(t)$  con el estado en un intervalo de tiempo anterior  $x(t - T)$ , donde  $T$  se hace coincidir con el periodo de la órbita a estabilizar y, por tanto se requiere su conocimiento previo:

<sup>12</sup>Los autores la consideran como una forma de realimentación del estado  $x_j$  calculado o medido

<sup>13</sup>A veces denominados “planos T” o “T-planes”.

<sup>14</sup>O bien un cierto número  $n$  de iteraciones calculadas con un paso  $\Delta_t$ , es decir,  $T = n\Delta_t$ .

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - T)) \quad (1.5)$$

En este método, denominado control por realimentación retardada (*Time Delayed Feedback Control*, TDFC), el control está continuamente aplicado y se hace proporcional la desviación encontrada en cada instante, consiguiendo un comportamiento periódico en el sistema. Como el método no requiere el cálculo de los equilibrios del sistema ni necesita esperar a que la órbita pase por sus proximidades en la sección de Poincaré, puede ofrecer ventajas frente al método OGY (1.5.1). Sin embargo, se necesita una estimación del periodo  $T$  de la órbita a estabilizar así como la determinación de la matriz de ganancias  $\mathbf{K}$ .

A partir de este fundamento, se han desarrollado las técnicas de control extendida por realimentación retardada (*Extended Time Delayed Feedback Control*, ETDFC) y sus múltiples variantes [Fiedler *et al* (2007), Nakajima (1997), Nakajima y Ueda (1998), Pyragas *et al* (2004), Pyragas y Pyragas (2006)], y véanse también [Pyragas y Pyragas (2011), Pyragiene y Pyragas (2005), Ushio (1996), Yamamoto *et al* (2001)]

Una de estas variantes [Souza y Amorin (2011)], considera que la acción de control debe considerar múltiples ( $N$ ) estados anteriores separados por un cierto retardo  $T_d$ , en la forma

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{x}(t) - (\mathbf{1} - \mathbf{r})S_{T_d}) \quad (1.6)$$

donde además de la matriz de ganancias  $\mathbf{K}$  se tiene que determinar el vector de pesos  $\mathbf{r}$  con  $0 \leq r_i < 1$  y en la que el escalar  $S_{T_d}$  se calcula como:

$$S_{T_d} = \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}^{k-1})^T \mathbf{x}(t - kT_d) \quad \text{con} \quad \mathbf{r}^0 = [1, \dots, 1]^T \quad (1.7)$$

Hay que hacer notar que cuando  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  este procedimiento extendido (ETDFC) coincide con el original de Pyragas (TDFC). También hay que resaltar que la señal de control en (1.6) se desvanece para cualquier valor de la matriz de ganancias  $\mathbf{K}$  y del vector de pesos  $\mathbf{R}$  cuando la trayectoria está sobre la UPO estabilizada, pues en ella,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t - kT_d) \quad \forall k \quad \text{si } T_d = T$  [Souza y Amarin (2011)].

#### 1.5.4. Otras aproximaciones

Desde aquellos trabajos pioneros y sus sucesivas mejoras [Fradkov y Pogromsky (2008), Macau *et al* (2008), Pyragas *et al* (2008), Pyragas y Pyragas (2011)], que siguen siendo de referencia para científicos e ingenieros de diferentes disciplinas han surgido múltiples técnicas y métodos para controlar las bifurcaciones y el caos. Cada método ofrece ventajas e inconvenientes de índole práctica, diferenciados según el objetivo fijado para el diseño del control.

Así, entre las técnicas y métodos basados en Liapunov (LBCM, *Lyapunov Based Control Methods*) se han aplicado al problema de control de las bifurcaciones y el caos. Así, el ámbito del “*Backstepping Control*”, cabe citar entre otros, los trabajos de Ge [Ge *et al* (2000)] y Mascolo y Grazi, estos últimos realizaron un interesante trabajo [Mascolo y Grazi (1999)], mostrando la eliminación del comportamiento caótico y la estabilización y/o seguimiento (“*tracking*”) en los atractores de Lorenz y Chua. También pueden encontrarse aproximaciones basadas en las técnicas de *Sliding Mode Control* [DeCarlo *et al* (1995), Yau *et al* (2000)] y Variable Structure Control [Yu (1997)], así como en métodos basados en pasividad (*Passivity Based Control*) [Fradkov *et al* (2006), Wei y Luo (2007)].

En el dominio de la frecuencia, se encuentran las técnicas basadas en el *balance armónico*, véase [Basso *et al* (1999)] y sus referencias. Dentro de este marco, es muy habitual el empleo de filtros selectivos (“*washout filter*”) [Abed y Fu (1986), Abed *et al* (1992), Abed *et al* (1995), Fradkov y Pogromsky (2008)], el cual amortigua todas las señales con frecuencias que quedan fuera de un estrecho

rango; cuando se incluye un filtro de este tipo en el lazo de realimentación y la frecuencia base del filtro coincide con la de una de las posibles soluciones periódicas inestables (UPO), entonces es posible que el sistema entre en un comportamiento periódico, abandonando el comportamiento caótico<sup>15</sup>.

El uso de filtros para conseguir eliminar el caos y conseguir comportamientos periódicos *sin realimentación*, muy aplicable a sistemas mecánicos y electrónicos, fue descrito por Kapitaniak y colaboradores [Kapitaniak *et al* (1993), Brindley y Kapitaniak (1994)], acoplando un absorbedor dinámico (“*dynamical absorber*”) al sistema caótico estudiado.

Como ejemplos de otros enfoques sobre el control de sistemas caóticos, dentro del grupo GAPSIS<sup>16</sup>, en [López *et al* (2007)], se usa una estructura compuesta por un control no lineal por realimentación del vector de estado y un controlador  $H_\infty$  lineal. Por otro lado en [López *et al* (2006), Prian *et al* (2009), Prian *et al.*(2011)], usan control por impulsos en sistemas híbridos. En [Prian *et al* (2012), Prian *et al.*(2015)] se analiza la estabilidad de un sistema de control híbrido adaptativo que estabiliza UPOs y que corrige el efecto de las desviaciones en los parámetros de la planta respecto de un modelo de referencia.

## 1.6. Hipótesis y objetivos

Como se ha adelantado, el problema del *control de bifurcaciones en un sistema multiparamétrico* puede ser considerado como un problema relacionado<sup>17</sup> con el problema del *control del caos determinista*, en el que se considera permanente presencia de bifurcaciones dinámicas<sup>18</sup>, que originan la aparición de

<sup>15</sup>Esta aproximación es muy usada en el control de lasers [Fradkov y Pogromsky (2008)].

<sup>16</sup>Grupo de Automática, Procesamiento de Señales e Ingeniería de Sistemas, de la Universidad de Cádiz.

<sup>17</sup>En el sentido de los comportamientos dinámicos de interés y en la necesidad de cambios en los parámetros internos o en las señales forzantes externas o señales de control.

<sup>18</sup>Interpretables en sentido amplio como “*causadas*” por la estructura no lineal, multiparamétrica y multivariable de los modelos considerados.



infinitas órbitas inestables inmersas en el atractor caótico representado por su modelo matemático.

Conseguir un comportamiento particular (estabilización en punto fijo, estabilización de PO *–periodic orbit–* y de UPO *–unstable periodic orbit–*) así como el mantenimiento de la órbita periódica estable SPO *–stable periodic orbit–* a partir de un comportamiento caótico ha sido lo determinante y objetivo principal del método de control que se presenta en esta memoria.

### 1.6.1. La hipótesis fundamental planteada

Tras el estudio y análisis de los distintos métodos de control del caos expuestos anteriormente, en esta memoria se plantea la tesis de que se puede encontrar una solución al problema de control del caos que surge a partir de la siguiente hipótesis<sup>19</sup>:

#### **Hipótesis:**

*Salvadas las restricciones de accesibilidad a las señales y otras limitaciones prácticas, es posible obtener experimentalmente un comportamiento periódico en un oscilador autónomo que se encuentra en situación de caos (o de bifurcaciones permanentes), sin tener ningún conocimiento del modelo matemático que lo describe, usando solamente la observación de una única señal de salida (variable medida) y la posibilidad de intervenir, mediante los adecuados pulsos de control, en una única entrada (variable manipulada) del sistema con comportamiento caótico.*

---

<sup>19</sup>A verificar experimentalmente.

### 1.6.2. Objetivos

La naturaleza no predecible del comportamiento caótico y la coexistencia en el atractor de múltiples órbitas periódicas inestables (o del caso particular de bifurcaciones permanentes), complica el diseño de controladores que tratan de modificar ese comportamiento caótico y conseguir una órbita periódica (PO) y su conservación como SPO. Por tanto, los objetivos (general y específicos) de esta memoria, coherentes con la hipótesis formulada son:

#### **Objetivo general:**

*El objetivo general de esta memoria y del método experimental de control a desarrollar en este trabajo, es lograr estabilizar el sistema caótico a controlar en una órbita periódica, que se alcanza como resultado de aplicar el control, y que, en algunos casos, puede aproximarse a una UPO, sin requerir un modelo matemático del sistema.*

La selección de una órbita concreta, de entre las posibles UPOs, POs y SPOs que se puedan presentar bajo control, no es, en esta memoria, un objetivo sino un problema abierto sobre el que se continua trabajando.

Además del objetivo principal, se consideran los siguientes objetivos específicos:

#### **Objetivos específicos:**

1. El método de control desarrollado, debe ser realizable y aplicable a procesos reales, y en particular a circuitos electrónicos.
2. Debe ser un método de control basado en eventos discretos y la señal de control debe ser única, con un pulso aplicado en cada evento.

3. El método tratará de usar una cantidad mínima de información sobre el sistema, basada en la medida de una sola variable (sensores), sin necesidad de tener que medir todas y cada una de las variables de estado y sin requerir el conocimiento de un modelo matemático del sistema a controlar.



## **Capítulo 2**

### **Método de control propuesto**



## 2.1. Introducción

Cada una de las técnicas presentadas en el capítulo anterior ofrece ciertas ventajas según sea el objetivo fijado para el diseño del control. A su vez, todas presentan dificultades para su realización práctica [Ogorzalek (1998)], por tanto, según cada caso, resultará más conveniente uno u otro método, como se discute y se dan a elegir en [Chen (1999), González-Miranda (2004), Ogorzalek (1993b), Boccaletti *et al* (2000), Andrievskii y Fradkov (2003)], o de entre los presentados en [López *et al* (2006), López *et al* (2007)], y también en [Prian *et al* (2009), Prian *et al.*(2011), Prian *et al* (2012), Prian *et al.*(2015)].

En este capítulo se analiza el problema de control que se planteó en los objetivos y se desarrolla un algoritmo de control que demostrará la validez de la hipótesis. Se estudia un método de control por pulsos (“*pulsed control*”), basado en eventos variables que se ajustan a la dinámica del proceso y que logra, en el sistema bajo test, un comportamiento periódico mediante la aplicación, en tiempo discreto, de una secuencia de control compuesta por pulsos cuya amplitud y periodicidad resultan dependientes de la dinámica del sistema.

El método desarrollado no usa una superficie de Poincaré única, sino que se basa en una condición de evento, que es variable con el tiempo, junto con una realización con realimentación no-lineal de sólo una variable medida. No requiere *a priori* conocimiento alguno del sistema dinámico, se ajusta a sus oscilaciones y conduce a un comportamiento estable y periódico tras la sintonía de los parámetros del controlador, ya que, una vez definidos el periodo de muestreo ( $T_m$ ) y el ancho del pulso ( $t_w$ ), el controlador sólo requiere el ajuste de un parámetro de ganancia ( $Kp$ ).

Es conocido que las no linealidades presentes en los sistemas [Slotine y Li (1991)] pueden diferenciarse como naturales (inherentes al sistema), o artificiales, que son aquellas que introduce el analista o diseñador de la ley de control. También pueden distinguirse por sus propiedades matemáticas como continuas o dis-

continuas, estas últimas no son aproximables localmente por una función lineal. Bajo estas consideraciones, un control que usa convertidores A/D y D/A con una ley de control no lineal por pulsos, como la que se discutirá en este capítulo, hay que considerarlo ***un tipo de control con no linealidades artificiales discontinuas, conducido por eventos discretos, ocasionales y variables según la dinámica del proceso.***

## 2.2. Estrategia de diseño del controlador

Dado que en general, las peculiaridades de los sistemas caóticos dificultan nuevas aproximaciones analíticas que, aunque *“tanta importancia tienen en la moderna ingeniería, nunca aportan la solución completa”* [Aracil (2011)], y puesto que además es inevitable plantearse multitud de cuestiones relacionadas con la realización práctica del control, entre las que cabría destacar:

1. ¿Cuáles son las formas de control idóneas para cada sistema caótico?
2. ¿Cabe una aproximación diferente a las actualmente aceptadas?
3. ¿Podrá estabilizarse el atractor en un ciclo límite?
4. ¿Cuáles son las formas de control mas adecuadas para un diseño con restricciones prácticas?
5. ¿Puede lograrlo un sencillo control por realimentación?
6. ¿Cuál será la sensibilidad del conjunto controlador-sistema al momento de la aplicación del control?
7. ¿Está garantizada la estabilidad a corto (*“short-term stability”*) y a largo plazo (*“long-term stability”*) en condiciones reales?



Parece que, ante tantos interrogantes de difícil respuesta analítica, queda justificada la ***aproximación experimental*** llevada a cabo en esta memoria para el diseño y sintonía de la forma de control presentada.

Así, serán las situaciones impuestas en la simulación numérica y, posteriormente, las realmente presentes tras la materialización del diseño, las que, mediante ***una sistemática de prueba y error***, permita encontrar ***una solución útil*** al problema planteado, que sea ***reproducible y aplicable*** a todos los sistemas caóticos que se han estudiado.

### 2.2.1. Restricciones al diseño

En la búsqueda de solución a estos problemas, a las limitaciones prácticas propias del estado de las tecnologías, hay que añadir las restricciones que se impongan al diseño a realizar, entre las que se podrían destacar:

1. El sistema a controlar y su controlador deben tener una estructura de una sola entrada y una sola salida.
2. El método no debe requerir ningún conocimiento del sistema a controlar mas allá de las cantidades alcanzadas y de las unidades físicas de entrada y salida (rangos dinámicos). Es decir, el sistema es considerado de mínimo conocimiento o tipo “*caja negra*”.
3. Han de poder utilizarse procedimientos estándares de adquisición y definición de datos. Es decir, el sistema a controlar tendrá un muestreo periódico para la observación de su dinámica y para la actualización de su control y, por tanto, sujeto a las limitaciones de los convertidores A/D y D/A, como son la discretización de las amplitudes, velocidad de conversión, fondo de escala, etc.
4. Los tests de simulación del algoritmo de control han de realizarse con dife-

rentes modelos de sistemas que ofrezcan dinámicas muy variadas y, en todos los casos, debe considerarse la inherente presencia del ruido de medida.

5. Se debe tratar de reducir el esfuerzo de control en un doble sentido: en las amplitudes alcanzadas por la señal de control y en los tiempos de permanencia de la misma sobre el sistema a controlar.

### 2.2.2. Formulación del problema de control

Se representa el modelo matemático del sistema a controlar por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ecuaciones de estado):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) \quad (2.1)$$

o bien:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, p) + \mathbf{G}(\mathbf{u})$$

y, también el caso particular:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, p) + \mathbf{G}(\mathbf{x})u$$

que corresponde a un sistema afín respecto a  $u$ .

En las expresiones anteriores,  $\mathbf{x} \in R^n$  es el vector  $n$ -dimensional de estado,  $\mathbf{p} \in R^{n_p}$  es el vector  $n_p$ -dimensional de parámetros del sistema y  $\mathbf{u} \in R^{n_u}$  es el vector  $n_u$ -dimensional de entradas de control.

La estructura  $\mathbf{F}$  es una función no lineal multivariable o campo vectorial, el

cual, en muchos casos, es una función suave como en los atractores de Lorenz [Lorenz (1963)], Chen [Chen y Ueta (1999)] o Lu [Celikovsky y Chen (2002)]; y en otros casos es una función lineal a tramos, como en los de Chua [Chua *et al* (1986)] o González [González *et al* (2005)].

Según sea el conocimiento que se tenga sobre el sistema, de las posibilidades de acceso a las magnitudes implicadas y de la facilidad para alterar sus valores, los métodos de control actúan modificando el vector de parámetros  $\mathbf{p}$ , o el vector de entradas de control  $\mathbf{u}$ .

La medida de la salida del sistema (“*event measurement variable*”, EMV) generalmente se denota por  $\mathbf{y}$ , es un vector  $n_y$ -dimensional que en general es función del vector de estado actual  $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ . Cuando  $\mathbf{u} = g(\mathbf{y})$ , se tiene un problema de control por realimentación de la salida y la estructura (2.1) es la del sistema en lazo cerrado correspondiente.

De acuerdo con la hipótesis formulada y objetivos planteados, se ha considerado una estructura tipo caja negra o de mínima información, lo que supone que tanto la salida como la entrada de control son escalares; también que, para los valores de los parámetros y las condiciones de operación fijadas, el comportamiento de (2.1) observado por  $y(t)$  cuando  $u(t) = 0$  (sistema libre), se corresponde con el de un sistema caótico.

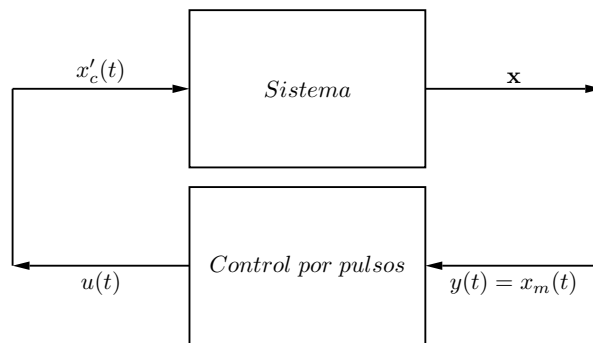


Figura 2.1: Propuesta de control por realimentación no lineal de la salida.

Si la medida se obtiene de la variable de estado  $x_m$  y la aplicación del control se realiza sobre la velocidad de cambio de  $x_c$  (figura 2.1), en el caso que ( $m < c$ ) el sistema (2.1) quedaría:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &\dots \\ \dot{x}_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &\dots \\ \dot{x}_c &= f_c(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) + u \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

con:  $y = h(x_m)$  una relación lineal<sup>1</sup>, y con  $u = g(y)$  una relación lineal o no lineal de las medidas<sup>2</sup>.

En esta memoria se plantea que la señal de control consista en pulsos de duración, amplitud e instante de aplicación ajustables. Se ha elegido esta forma de control por el interés de conseguir una realización del controlador, en tiempo discreto y conducido por eventos con:

<sup>1</sup>Que puede incluir un factor de escala y/o una condición de operación nominal o “*biass*”.

<sup>2</sup>Control del sistema por realimentación no lineal de la salida.

$$u(t) = \begin{cases} U_j & t_j \leq t \leq t_j + t_w \\ 0 & t_j + t_w < t < t_{j+1} \end{cases} \quad (2.3)$$

Siendo (véase la sección 2.3.1)  $t_j$  y  $t_{j+1}$  los instantes de tiempo, también llamados instantes de evento, en los que se decide la aplicación y se actualiza la amplitud de la señal de control,  $t_w < (t_{j+1} - t_j)$  el intervalo de tiempo de la actuación o ancho del pulso y  $U_j$  el valor que representa la amplitud constante del mismo en el intervalo considerado. Nótese que, en aplicaciones reales, no siempre resultará factible poder elegir  $x_m$  y  $\dot{x}_c$ , sino que el método deberá aplicarse en las condiciones reales de medida y posibilidades de manipulación del sistema.

### 2.2.3. Parámetros del controlador

La estrategia presentada y las restricciones impuestas al diseño del controlador permite adelantar qué parámetros deberán ser accesibles al operador de planta o usuario del control. Puesto que el diseño deberá incorporar una realización por muestreo periódico, el primer parámetro del controlador es el **periodo de muestreo**  $T_m$ , que deberá elegirse de acuerdo con el teorema del muestreo [Astrom y Wittenmark (1995), Astrom y Wittenmark (2002)] según los criterios habituales de adaptación a la dinámica del sistema a controlar, y que también queda sujeto a las características del hardware empleado. También el controlador deberá contar con un parámetro de ajuste por el operador, en este caso de **ganancia**  $K_p$ <sup>3</sup>. Si además el controlador tiene que admitir una forma de control por pulsos (“*pulsed control*”) con un **ancho de pulso**  $t_w$ , quedan establecidos los tres parámetros del controlador y cuyos valores quedarán definidos tras su ajuste por el operador.

---

<sup>3</sup>Que puede ser considerada la ganancia de realimentación -“*feedback gain*”-.

## 2.3. Síntesis y datación del evento variable

En esta sección se describe como, a partir de la observación del comportamiento dinámico de varios atractores caóticos, se plantea la construcción y datación, con cada muestra, del valor de evento variable (“*event value*”, EV) y de su elegible condición de evento variable (“*event condition*”, EC), como alternativas (útiles para el control), frente a las superficies de Poincaré definidas por valores (EV) fijos.

### 2.3.1. Morfología de la oscilación caótica

La observación del comportamiento de los modelos matemáticos (o de sus realizaciones prácticas) de diferentes atractores en el espacio de estados permite apreciar que, aunque las dinámicas presentan características morfológicas muy diferentes, hay varios rasgos que están presentes en todos. Por ejemplo, se aprecia que la dinámica queda confinada<sup>4</sup> en una región  $Q(\mathbf{x}) \subset R^n$  que contiene a todos los estados  $\mathbf{x} \in Q(\mathbf{x})$  que se alcanzan en la evolución del sistema descrito por (1.1) con  $t_0 < t < \infty$  a partir de una condición inicial  $\mathbf{x}_0$  en  $t_0$  de su cuenca de atracción.

Entonces, en un sentido amplio, el atractor caótico es **estable** (ver 1.4.1), pues la trayectoria seguida desde cualquier instante inicial  $t_0$  y desde cualquier estado inicial  $\mathbf{x}_0$  de su cuenca de atracción, quedará confinada en un cierto  $Q$  que resultará limitado.

Por tanto, puede considerarse que, cuando  $t \rightarrow \infty$ , se tendrán ciertos estados  $\mathbf{x}_\delta(t_0, \mathbf{x}_0) \in Q$  y  $\mathbf{x}_\varepsilon(t_0, \mathbf{x}_0) \in Q$  que resultarán ser cotas superior o inferior (aunque no determinables *a priori*) de todos los desarrollados por la dinámica en el intervalo considerado. En efecto, la trayectoria  $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in Q$  existe para

---

<sup>4</sup>Pues aunque la función de campo -lado derecho de (1.1)- esté definida para todo *punto*  $\mathbf{x} \in R^n$ , no todo punto de  $R^n$  forma parte de la trayectoria que define (1.1) a partir de una condición inicial  $\mathbf{x}_0$ .

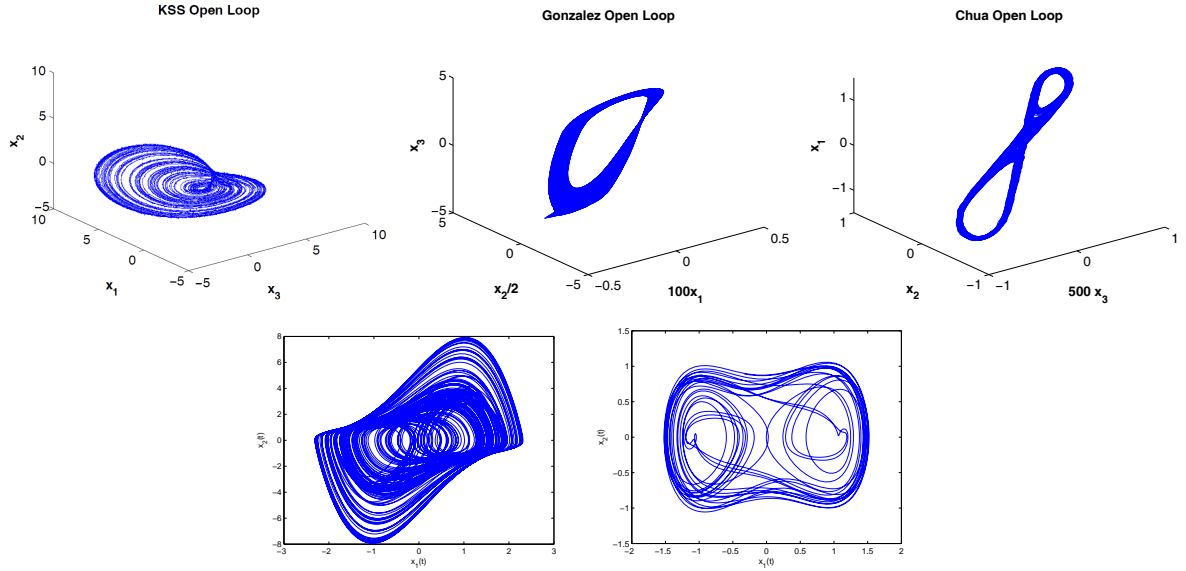


Figura 2.2: Morfología de diferentes atractores. Arriba, de las realizaciones de los sistemas KSS, González y Chua. Abajo, modelos de Van der Pol Duffing y Duffing.

todo  $t > t_0$  y permanece dentro de las cotas, esto es, para cualquier estado en cualquier  $t > t_0$  se tiene  $\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \|\mathbf{x}_\delta\|$  o  $\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| > \|\mathbf{x}_\varepsilon\|$  y la morfología estructural que presenta la dinámica del atractor es estable. Obsérvese que la trayectoria caótica que se desarrolla está continuamente redefiniendo  $Q$  y que, cuando  $t \rightarrow \infty$ , el conjunto  $Q$  terminará acotado superior e inferiormente.

Estas excursiones de la trayectoria en el espacio de estados, se reflejan evidentemente en la evolución temporal de las variables de estado, encontrándose que las señales evolucionan entre un valor máximo (del pico superior, más positivo o menos negativo) y otro mínimo (del pico inferior, más negativo o menos positivo), aunque estos son diferentes<sup>5</sup> en cada oscilación caótica, como se observa en la fig 2.3:

<sup>5</sup>O locales.

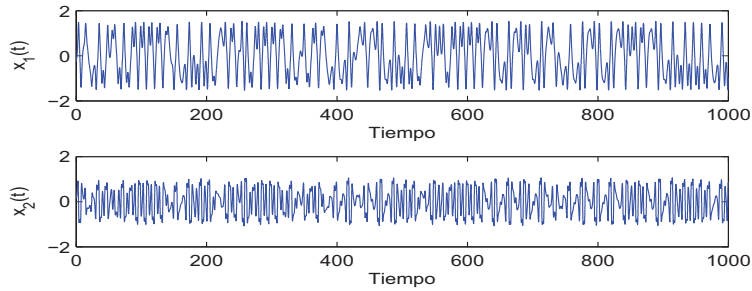


Figura 2.3: Morfología de las medidas en el atractor de Duffing sin aplicar control.

El valor máximo local alcanzado por la variable observada en cada oscilación se utiliza en algunas estrategias de control, tales como en las técnicas de la dinámica de pico a pico (*peak to peak dynamics*) [Candaten y Rinaldi (2000), Piccardi y Rinaldi (2000), Piccardi y Rinaldi (2003)], basada en los valores de pico y su evolución hacia un pico de equilibrio que ha de ser determinado previamente mediante el modelo matemático del sistema.

De la observación de la morfología del comportamiento caótico, las cuestiones que surgen de manera natural son:

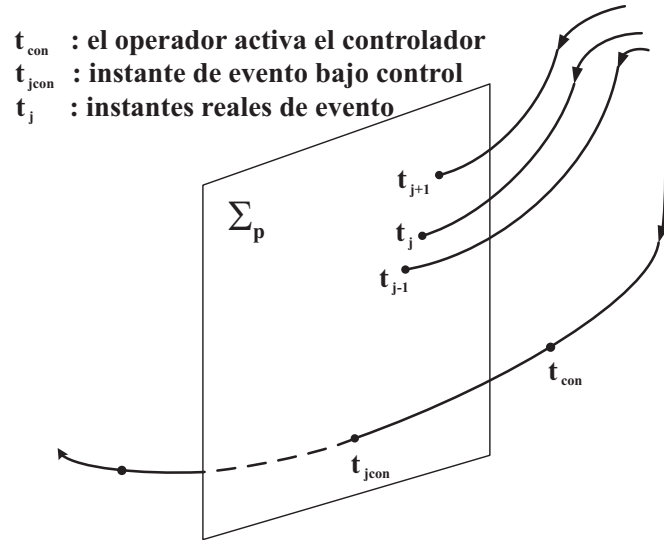
1. ¿Perderá el atractor caótico la **estabilidad al perturbarlo**?
2. ¿**Dejará de oscilar** y su dinámica se acomodará en un equilibrio estable?
3. ¿Cuáles son los límites de la perturbación, en **amplitud, forma y duración**, para conseguir un comportamiento periódico?
4. ¿**Qué tipo de información, y en qué cantidad**, puede extraerse de las medidas efectuadas para lograr un control realimentado eficaz?

La figura 2.4, [López *et al* (2006)] se usa para analizar estas cuestiones, aclarar la notación usada en lo que sigue y plantear la definición del evento variable<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Base del método propuesto.





Sección de Poincaré o Sección de la Condición de Evento (EC)

$T_m$  : periodo de muestreo  
 $t_k$  : instante de muestreo ;  $t_k = kT_m$  ;  $k = 1, 2, 3, \dots$   
 $t_{kj}$  : instante asignado al evento por muestreo  
 $t_{kj} = N_j T_m$  ; ( $N_j$  = entero positivo)

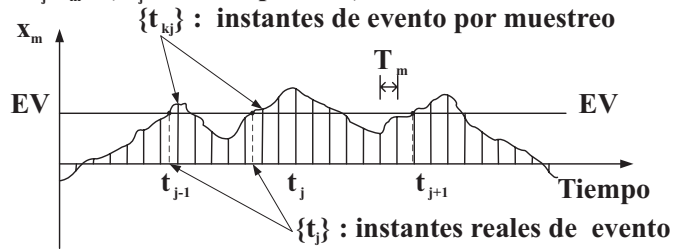


Figura 2.4: Diagrama explicativo de la notación utilizada. Extraída de [López et al (2006)]

Cuando  $\Sigma_P$  es un plano definido por un valor constante (“event value”, EV) de la variable de estado medida  $y = x_m$ , cada vez que la trayectoria lo atraviesa en un determinado sentido, se dice que se ha cumplido la *condición de evento* (“event condition”, EC)  $y_{event} = (x_m)_{EC}$ , o que se ha producido el impacto o evento  $j$ -ésimo y que éste ocurre en el instante o fecha  $t_j$ . Entre dos eventos sucesivos,  $(j-1)$  y  $j$ , transcurre el *tiempo de vuelo* o *de retorno*  $T_j = (t_j - t_{(j-1)})$ .

Si se realiza en el sistema (2.2) un muestreo de las señales con periodo  $T_m$ , las muestras se denotan por  $y_k = y(kT_m)$ , el valor del evento elegido  $y_{event_j}$  y el valor del pico entre dos eventos consecutivos  $y_{pj}$ .

Así, y como se recordará mas adelante (sección 2.4.1), los parámetros propios de la dinámica considerados para el diseño del algoritmo de control son tres, **el valor de pico**  $y_{pj}$ , **el valor de evento**  $y_{event_j}$  y **el intervalo de tiempo entre dos eventos consecutivos**  $T_{kj} = t_{kj} - t_{k(j-1)}$ , (tiempo de vuelo o de retorno).

### 2.3.2. Definición del evento variable

Una superficie de Poincaré  $\Sigma_P$ , definida por una función escalar:

$$S : R^n \rightarrow R, S(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$$

permite determinar el estado del sistema cuando la trayectoria descrita por su evolución dinámica la atraviesa en un sentido definido. Como se ha explicado anteriormente, este evento puede utilizarse para decidir el instante de aplicación del control ocasional por pulsos. La elección de una superficie  $\Sigma_P$  conveniente para el control resulta ser un problema añadido para el diseño de controladores de sistemas caóticos [Prian *et al.*(2011), Prián *et al* (2012), Prián *et al.*(2015)].

También la condición de evento (EC) puede formularse en términos del valor de la muestra  $y_k = y(kT_m)$  (lo que permite su determinación “*on-line*”). Una forma de definir el evento  $j$ -ésimo, a partir de las muestras, es cuando se cumpla que:

$$y_{kj} = y_k \quad (\text{EV}) \quad \text{si} \quad y_{k-1} \leq y_{event} \leq y_k \quad (\text{EC}) \quad (2.4)$$

o bien:

$$y_k = y_k \quad (\text{EV}) \quad \text{si} \quad y_{k-1} \geq y_{event} \geq y_k \quad (\text{EC})$$

asignándosele el instante  $t_{kj}$ , como fecha del evento.

La incertidumbre para esta fecha asignada frente al instante real del evento  $t_j$  es  $t_{kj} - t_j < T_m$ , y también la del tiempo de vuelo o de retorno real  $T_j$  con el asignado  $T_{kj} = (t_{kj} - t_{k(j-1)})$ . Cuando  $T_{kj} = T_{k(j-1)}$ , se podrá considerar conseguido un comportamiento periódico.

Por otro lado, al evaluar, *on-line*, con cada muestra  $k$ , la *media móvil* calculada como:

$$(\text{EV})_k = \langle y_k \rangle_k = \frac{1}{k_j} \sum_{k=1}^k y_k$$

se puede construir un *valor de evento variable*  $y_{event_k} = \text{EV}_k$ .

A diferencia de los métodos que basan sus estrategias de control en una sección de Poincaré definida por una condición de evento prefijada y constante, aquí ***se propone que el valor de evento  $j$ -ésimo,  $\text{EV}_j$ , sea el valor medio de las  $k_j$  muestras de la salida  $y(t)$  obtenidas entre dos condiciones de evento consecutivas  $(j-1)$  y  $j$ :***

$$(\text{EV})_j = y_{event_j} = \langle y_k \rangle_j = \frac{1}{k_j} \sum_{k=1}^{k=k_j} y_k \quad (2.5)$$

Este valor de evento (EV) variable con cada oscilación, junto con la elección de la condición de evento elegida (EC), permite que el instante de aplicación de la señal de control quede definido por la propia dinámica del sistema y no por una condición fijada *a priori*. Se tiene entonces ***un método de control discreto conducido por eventos variables extraídos de evolución dinámica del sistema bajo control.***

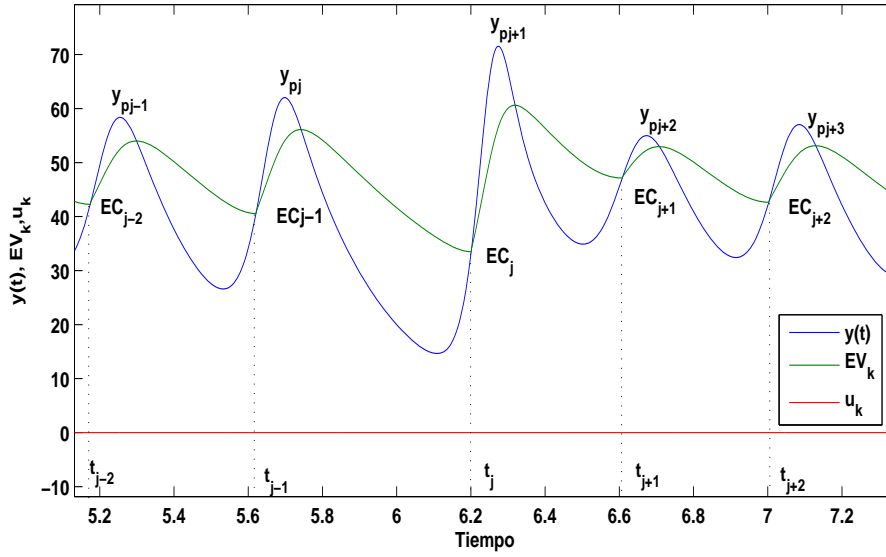


Figura 2.5: Condición de evento ajustada. Dinámica sin control.

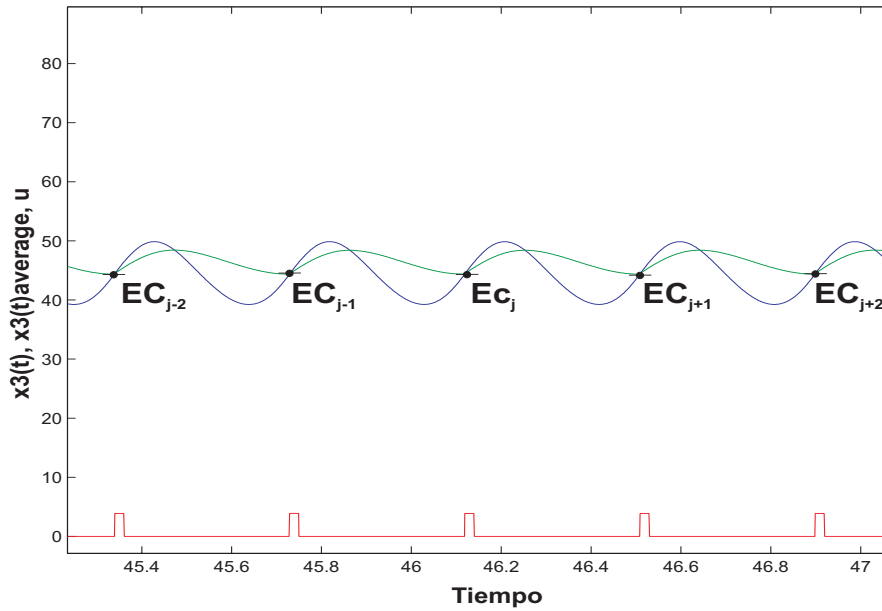


Figura 2.6: Oscilaciones observadas y condición de evento bajo control.

La figura 2.5, muestra que el cruce ascendente de  $y_k$  con el valor medio  $\langle y_k \rangle_j$  define la *condición de evento variable*  $(EC)_j$  (a diferencia de la fija en OGY), que

ocurre *después* de que  $y_k$  haya pasado por un valor máximo  $y_{pj}$ ; es decir,  $y_{event_j}$  alcanza un valor máximo *retrasado* (sin tener que fijar el retardo como en las TDFC de Pyragas), de manera que  $(y_{pj} - y_{event_j}) > 0$  refleja una diferencia que depende no sólo del valor de pico  $y_{pj}$  (como en las técnicas “*peak to peak*”), sino también de **la forma** (la novedad del método) con la que evoluciona en el tiempo la oscilación  $j$ -ésima. En un régimen periódico,  $(y_{pj} - y_{event_j})$  será un valor constante, como se muestra en la figura 2.6.

Es conocido el uso de elementos de retardo o de filtros paso-bajo en el lazo de realimentación para obtener una información retardada utilizada por la estrategia de control (como ocurre en las técnicas TDFC [Pyragas *et al* (2004)]). Su diseño depende del sistema caótico considerado. El promediado de muestras o *media móvil entre eventos* presentado tiene la ventaja de ajustarse a las distintas frecuencias y amplitudes presentes en la compleja dinámica caótica, y, sin necesidad de filtros, se muestra útil en todos los sistemas caóticos estudiados en esta memoria.

## 2.4. Síntesis de la amplitud del pulso de control

En esta sección se considera el problema de la modulación de los pulsos de control, justificando la modulación de amplitud, con ancho de pulso fijo, en la ley de control que se propone. Además se argumenta sobre la inclusión, en forma explícita, de los parámetros del controlador en la misma.

### 2.4.1. Ley de control propuesta

Como ya se ha indicado, entre los objetivos del método de control que se plantea, está el conseguir que, a partir de un comportamiento caótico del sistema, en un instante dado el operador active un algoritmo o ley de control por pulsos, y

tras un intervalo de tiempo transitorio, el comportamiento del sistema pase de ser caótico a ser periódico.

La cuestión que se plantea es:

***¿cómo deben modularse estos pulsos?***

Aunque puede hablarse de una modulación en frecuencia (FM) definida en el tiempo por la secuencia de eventos variables durante el periodo transitorio de la acción de control, esta modulación es automática y dirigida por la dinámica del sistema. Cabría pensar que una modulación del ancho del pulso de amplitud constante (PWM) podría ser la más adecuada para una ley de control por pulsos, sin embargo, en las pruebas realizadas no se encontraron resultados esperanzadores que fueran válidos para todos los sistemas que se estudian en esta memoria, posiblemente, porque el ancho del pulso equivale al tiempo de intervención en la velocidad de cambio de la componente elegida, alejando a la dinámica bajo control del objetivo de periodicidad. Por ello este modo se descartó y se optó por un ancho de pulso fijo establecido por el operador.

Por tanto, la opción con más posibilidades de éxito puede ser una modulación de la amplitud (AM) de los pulsos de la secuencia de control  $\{u_k\}$ , que debe conducir al sistema 2.1 a trayectorias periódicas estables, según una ley de control que se ajuste a las oscilaciones caóticas mediante una realización con realimentación no-lineal de la salida, como la siguiente (obtenida de forma experimental):

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_k &= \frac{K_p T_m (y_{pj} - y_{event_j})^2}{t_w (t_j - t_{j-1})} \\ \text{si} & t_j \leq t \leq t_j + t_w \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \dots, k_{j+1} \\ u_k &= 0 \quad \text{cuando} \quad t_j + t_w < t < t_{j+1} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

En la que se distinguen los siguientes parámetros propios del controlador (o

parámetros de ajuste): la ganancia proporcional ( $K_p$ ), el periodo de muestreo ( $T_m$ ) y el ancho del pulso ( $t_w$ ). En cada caso, el ajuste de los parámetros del controlador ( $K_p, T_m, t_w$ ) se hace de forma experimental.

También se utilizan el valor de pico ( $y_{pj}$ ), el valor de evento ( $y_{event_j}$ ) y el intervalo de tiempo de vuelo o de retorno entre dos eventos consecutivos ( $T_{kj} = t_{kj} - t_{k(j-1)}$ ). Nótese que la amplitud del pulso permanece constante ( $U_j$ ) entre dos eventos consecutivos.

### 2.4.2. Análisis en detalle de la ley de control

A modo de resumen de los argumentos expuestos hasta aquí, y con referencia a la figura 2.7, a continuación se explica la importancia de cada uno de los componentes en la génesis de la forma de control (2.6).

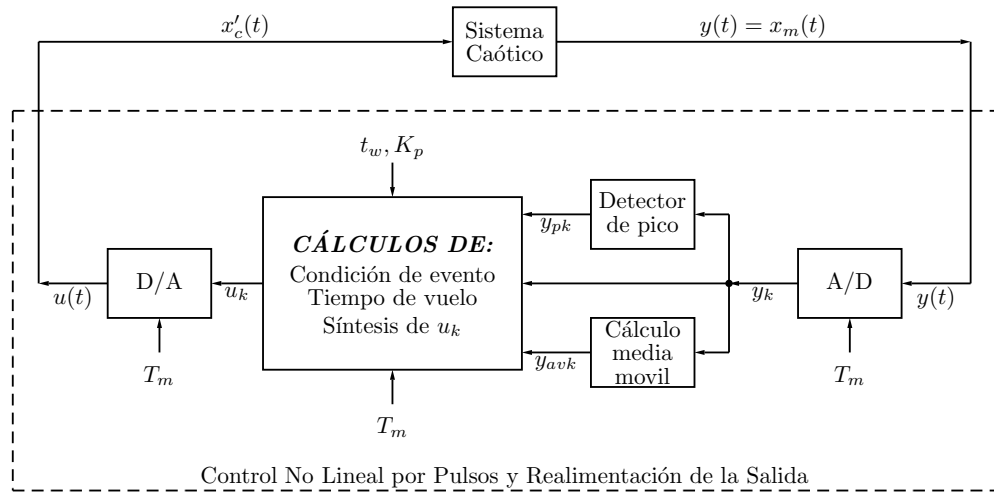


Figura 2.7: Esquema básico del método de control propuesto.

El primer factor a considerar, **el periodo de muestreo**  $T_m$ , queda restringido inferiormente por la tecnología de adquisición y de la duración del algoritmo en el sistema de tiempo real estricto que se use para materializar el control (como se

explicará en la sección 4.2), y, superiormente, por las exigencias del teorema del muestro y del problema del *aliasing*<sup>7</sup>.

Esto supone que, dependiendo de la rapidez de las dinámicas asociadas en el sistema a controlar, el operador del control dispondrá de mayor o menor holgura para fijar el valor de  $T_m$ . Pero hay una segunda característica que invita al operador a elegir el  $T_m$  mínimo disponible: el número de muestras que compondrán ***el valor del evento variable***  $y_{event}$ . En efecto, si se tienen pocas muestras entre eventos, los valores de evento calculados durante el transitorio mostrarán gran dispersión, dificultando la convergencia del sistema en lazo cerrado a un valor de evento de menor dispersión. Ello origina que, a su vez, se tenga menor variabilidad en su diferencia con ***el valor de pico***  $y_{pj}$  que es propio de la dinámica de cada sistema. Además, la incertidumbre en la datación de los eventos  $t_j$  y su repercusión en el intervalo  $(t_j - t_{j-1})$  también influirá si  $T_m$  no es el mínimo disponible. Nótese pues la importancia de las reflexiones sobre complejidad y multi-causalidad que se expusieron en la sección 1.3 y que están implícitas en la estructura de control (2.6), como se sigue mostrando y analizando a continuación.

***El ancho del pulso***  $t_w$ , que se materializará con un número entero  $n_w$  de periodos de muestreo ( $t_w = n_w T_m$ ), desempeña también un importante papel sobre la eficacia del control y su objetivo de obtener finalmente una órbita periódica. Además de la obvia necesidad de poner fin al pulso, no debe olvidarse que mientras dure  $t_w$  se está aplicando el control y, por tanto, se está cambiando la componente  $\dot{x}_c$  del vector de campo  $F$ , es decir, se está cambiando la trayectoria natural del sistema sin control (1.1), hacia la forzada del sistema (2.2.2) durante un mayor o menor tiempo ( $t_w$ ). El valor del ancho del pulso, o tiempo de actuación del control, debe elegirse con cuidado. En los ensayos realizados en esta memoria se ha procurado elegir un valor mínimo para  $t_w$  que resultara eficaz<sup>8</sup>, pues

<sup>7</sup>A lo que habría que añadir los problemas de definición del ancho de banda del sistema caótico, la definición de la frecuencia de Nyquist y la influencia del filtro digital *antialiasing* en la dinámica de lazo cerrado resultante.

<sup>8</sup>Aunque no necesariamente óptimo.



evidentemente, esta elección también influye en el esfuerzo (energía) de control.

Obsérvese que **la diferencia** ( $y_{pj} - y_{event_j}$ ) permite obtener un factor variable mientras no se logre el objetivo de periodicidad. En las primeras etapas de la génesis del algoritmo propuesto, se la consideró a modo de “*señal de error*”, propia de todo sistema de control por realimentación. En ella, el sustraendo suele ser un valor *fijo* de referencia (el equilibrio  $x^*$  en la superficie de Poincaré en el método OGY, el retardo  $T$  en el método de Pyragas, ...), y que aquí, como una innovación del método propuesto, es la media móvil calculada entre dos eventos sucesivos. Por otro lado, el minuendo no es aquí el valor actual medido, sino un valor característico de la dinámica desarrollada, el valor del pico de mayor valor. La comparación por diferencia de estos dos valores genera un factor variable que se usará en la síntesis de la señal de control.

Por último, como ya se ha reiterado, **el tiempo de vuelo** ( $(t_j - t_{j-1})$ ) constituye, junto con la condición de evento variable, un factor fundamental en la ley de control propuesta, al hacer que esta ley dependa, no sólo de las variaciones de amplitud de cada oscilación, sino también del tiempo empleado en completarla. También en las primeras fases de la génesis del algoritmo, se consideró si incorporar o no el tiempo de vuelo en el denominador la ley de control propuesta. Se observó que su inclusión permite, junto con la diferencia de ( $y_{pj} - y_{event_j}$ ) anterior, otro factor de ajuste automático de la amplitud del pulso, corrigiendo la amplitud del pulso si se producen, bajo control, perturbaciones en el periodo (“*jitter*”), y/o la presencia de posibles bifurcaciones dinámicas que intenten desestabilizar la órbita una vez estabilizada.

Como se comprobará, una vez sintonizados los parámetros del controlador<sup>9</sup>, la intervención en el sistema mediante los pulsos que se proponen conducen, de manera progresiva, a una situación de convergencia, en la que, cuando la evolución dinámica del sistema bajo control resulte periódica, se tendrá una secuencia de pulsos  $\{u_{kj}\}$  con amplitud, duración e intervalo de tiempo de aplicación cons-

<sup>9</sup>Con el procedimiento de ajuste señalado en la sección ??

tantes. Además, el método ha resultado útil para una gran variedad de sistemas caóticos, a diferencia de otros que sólo demuestran una utilidad “*ad hoc*”.

En resumen, cuanto menor sea la energía de actuación del control, reflejada en la amplitud y la duración del pulso, menor será la modificación que sufran las trayectorias resultantes, de manera que, idealmente, la intervención del controlador tendería a cero si el comportamiento periódico obtenido bajo control fuera la estabilización de una solución periódica inestable (UPO) o de una solución periódica estable (SPO) del sistema (2.1) para cuando  $u(t) = 0$ , (sistema libre o en lazo abierto).

### 2.4.3. Otras variantes de utilidad

Puesto que en la ley de control planteada (2.6) todos los términos son positivos para  $K_p > 0$ , si el sistema no soporta la intervención por pulsos positivos, aunque si por pulsos negativos, habría que cambiar la polaridad de los mismos. Entonces se puede hablar de las formas Unipolar+ y Unipolar- , en los que según la variante elegida, siempre son pulsos positivos o negativos los que se aplican, quedando:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_k &= \pm \frac{K_p T_m}{t_w} \frac{(y_{pj} - y_{event_j})^2}{(t_j - t_{j-1})} \\ &\text{si } t_j \leq t \leq t_j + t_w \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, k_{j+1} \\ u_k &= 0 \quad \text{cuando } t_j + t_w < t < t_{j+1} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Otras variantes de la ley de control, son las denominadas Bipolar+ y Bipolar- ( ver 2.8), que resultan muy útiles cuando el sistema a controlar soporta la forma de control bipolar, es decir, los pulsos de control aplicados pueden ser positivos o negativos sin restricción. La diferencia entre las variantes es únicamente el signo

elegido para el cálculo del primer pulso.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k = \pm \frac{K_p T_m (y_{pj} - y_{event_j})^2}{t_w (t_j - t_{j-1})} (y_{event_j} - y_{event_{j-1}}) \\ \text{si } t_j \leq t \leq t_j + t_w \text{ con } k = 1, 2, \dots, k_{j+1} \\ u_k = 0 \text{ cuando } t_j + t_w < t < t_{j+1} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

En estas variantes bipolares se usa el valor de evento anterior ( $y_{event_{j-1}}$ ) para añadir el término ( $y_{event_j} - y_{event_{j-1}}$ ) que construye un factor corrector basado en la evolución de los valores de evento hacia uno de equilibrio. Además, este término ayuda a que la magnitud de la señal de control resulte menor o tienda a disminuir conforme la dinámica obtenida converja a una situación periódica.

Como en este método el instante de activación del controlador  $t_{on}$  depende del operador de planta, a veces los pulsos pueden tomar magnitudes inicialmente grandes, pero a medida que transcurra el tiempo (transitorio), y el algoritmo de control lleve al sistema a una situación periódica estabilizada (SPO), la diferencia en la magnitud de los pulsos de control se irá haciendo menor.

## 2.5. El ruido de medida

Es conocido que el ruido de medida afecta especialmente a las prestaciones de los algoritmos de control de sistemas caóticos [Ogorzalek (1998), Chen (1999), Piccardi y Rinaldi (2003)]. Si bien es posible disminuir el ruido de medida mediante filtros, éstos alteran la dinámica en fase y amplitud, por lo que, al tratar de minimizar sus efectos sobre la dinámica resultante puede que, en determinados casos, se desaconseje su uso.

El controlador estudiado no es una excepción. El ruido de medida le afecta

significativamente cuando, para cada sistema caótico, se superan determinados umbrales. En la figura 2.8 se tiene el sistema de Lorenz bajo condiciones de ruido, simulado según  $y_k = x_{mk}(1 + \rho)$ , siendo  $\rho$  un número aleatorio de media cero y distribución uniforme, comprendido entre  $\pm 0,02$ , que representa el porcentaje de ruido supuesto en el valor medido. La pérdida de control es evidente.

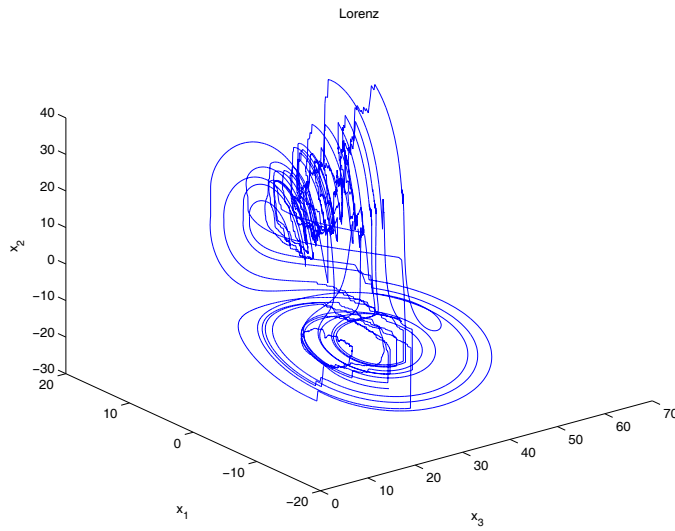


Figura 2.8: Sistema de Lorenz sin discriminador. Ruido de  $\pm 2\%$  ( $t > 80$  s.).

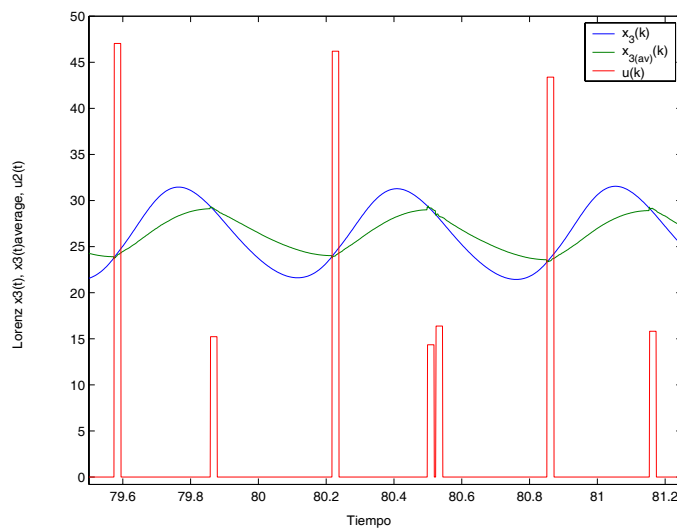


Figura 2.9: Falsos eventos. Detalle en el sistema de Lorenz. Ruido de medida de  $\pm 2\%$ .

Sin embargo, como el control sólo actúa durante breves intervalos de tiempo, la causa principal de que le afecte el ruido de medida es la decisión de activar la acción de control cuando se detecten falsos eventos producidos por el ruido.

La figura 2.9 muestra la señal de control generada por falsos eventos en los intervalos (79.8, 80.0), (80.4, 80.6) y (81.0, 81.2).

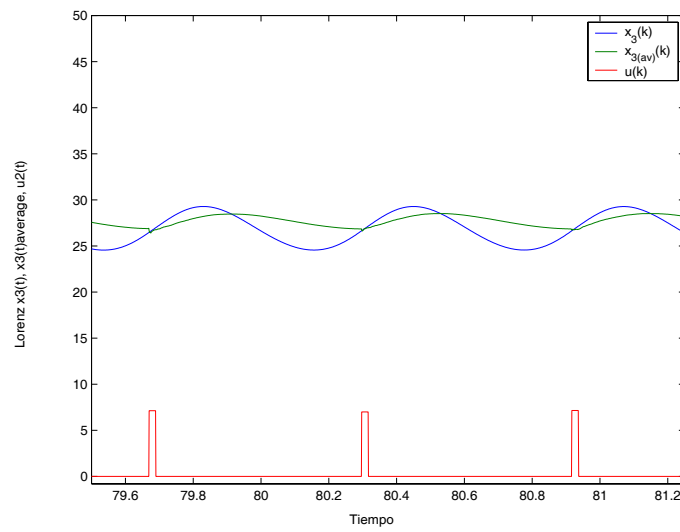


Figura 2.10: Los falsos eventos son eliminados con  $t_{holdoff} = 300$  ms.

Para evitar activar la señal de control por falsos eventos debidos al ruido de medida, se ha incluido, en el algoritmo de control, la capacidad de inhibir la aplicación de la acción de control.

Para ello, el controlador propuesto dispone de **un nuevo parámetro**,  $t_{holdoff}$ , que es ajustable por el operador y permite lograr un efecto **discriminador de falsos eventos**.

En efecto, una vez aplicado el pulso de control, puede inhibirse la generación de otro pulso durante un intervalo de tiempo ( $t_w + t_{holdoff} < T_{kj}$ ), de manera que se ignora toda falsa condición de evento que pudiera aparecer debido al ruido de medida, habilitando la aplicación del control sólo en las proximidades del próximo evento, caracterizado por la periodicidad esperada  $T_j$ , de los mismos, y

que el operador puede estimar durante el aprendizaje, por observación y medida de las características de la dinámica del sistema caótico a controlar, en particular, de la amplitud de pico y del tiempo de vuelo.

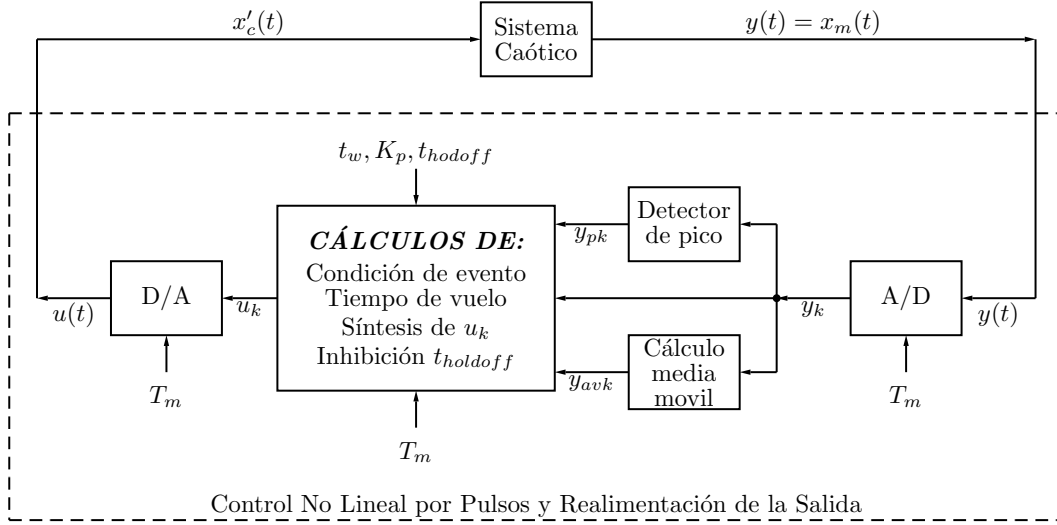


Figura 2.11: Esquema del control propuesto con inhibición de falsos eventos.

## 2.6. Ajuste por el operador

Como la evolución dinámica en un sistema caótico es muy dependiente de las condiciones iniciales, en las simulaciones realizadas en el capítulo 3, se consideró un conjunto de condiciones iniciales que, estando dentro de la cuenca de atracción, llevan a cada oscilador a un comportamiento caótico (en los trabajos experimentales que se mostrarán en el capítulo 4, se ha podido constatar que tras la alimentación de los circuitos, se producen unas condiciones iniciales que llevan a cada oscilador al comportamiento caótico) y es, a partir de entonces, cuando el operador está habilitado para aplicar el control.

En cada ensayo realizado el control se ha aplicado en un momento distinto,

de manera que el estado inicial del sistema cuando se activa el controlador es siempre diferente.

Así, tras fijar el periodo de muestreo  $T_m$ , según requiera la dinámica del sistema y del hardware disponible, para tratar de estabilizar el sistema caótico en una órbita periódica, el operador realiza los siguientes pasos:

(i) usa el menor ancho del pulso realizable  $t_w = T_m$  y elige un valor inicial para la ganancia  $K_p$ ,

(ii) observa el número de pulsos entre eventos y aumenta o reduce  $t_{holdoff}$  hasta conseguir un único pulso,

(iii) si el comportamiento obtenido no es satisfactorio, eleva o reduce (poco a poco) la ganancia  $K_p$ , hasta anular o saturar la amplitud del pulso  $u_k$ ; si no logra la periodicidad estable, aumenta el ancho del pulso  $t_w$  y repite este paso hasta que consigue una periodicidad con una banda (o zona de sombra de la órbita) limitada (que fundamentalmente se puede deber al ruido de medida),

(iv) realiza el ajuste fino del controlador retocando ligeramente la ganancia o del ancho del pulso y repite estas operaciones hasta conseguir el objetivo (periodicidad estable).

## 2.7. El algoritmo de control como sistema híbrido

Con el fin de clarificar la estrategia del algoritmo desarrollado, se puede intentar una aproximación cualitativa de su funcionamiento mediante una descripción del mismo como autómata híbrido [Goebel *et al* (2009), Tian *et al* (2004), Prian *et al.*(2011), Nagore *et al* (2013)], como el mostrado en la figura 2.12.

En efecto, se pueden distinguir tres **modos o estados discretos**,  $q \in Q = \{q_0, q_1, q_2\}$  en los que se desarrolla la dinámica continua  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}, u)$ ; estos modos son:

- $q_0$ , en espera de la orden de control por parte del operador y en el que se realiza el muestreo, se calcula el valor de evento y se procede según la condición de evento, pero no se aplican pulsos. Este modo puede considerarse un modo inicial o de puesta en marcha del sistema y también un modo de espera, en el que se aprovecha para que el operador defina los parámetros del controlador y se empiece a calcular la media móvil;
- $q_1$ , bajo control, en espera de que se cumpla la condición de evento  $y_{event_j}$ ;
- $q_2$  donde, siguiendo bajo control, se aplica la señal de control  $u \neq 0$ , (elegida según 2.7 o 2.8) y se espera a que se cumpla el intervalo de tiempo ( $t_w$ ) que define el ancho de pulso programado.

Uno y solo uno de estos modos está activo en cada momento del tiempo, en cada uno de ellos se desarrolla la dinámica continua del sistema caótico a controlar (ya sea simulado o real), que puede quedar descrita por tres subsistemas continuos  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}, u)$ ,  $y = g(x_m)$ , de los que se obtienen las muestras cada  $T_m$ , y en los que la aplicación de flujo  $\mathbf{f}_q : Q \times R^n \rightarrow R^n$ , se diferencia, en cada caso, por el valor de la señal de control  $u$  y en los que  $g(\cdot)$  es, en este caso, única y escalar ( $y = x_m$ ), pues sólo se mide -directamente- una variable de estado.

El **estado híbrido** del sistema [Tian *et al* (2004)], viene descrito por el par  $((q(t), \mathbf{x}(t)))$ .

Con la notación usada en [Goebel *et al* (2009)] y en la sección 2.2.2, en la figura 2.12, se identifican ocho de los nueve posibles **tránsitos**  $Edges \subset Q \times Q$ , que definen los saltos (cambios o tránsitos) de un estado discreto (o *modo*)  $q_a$  a otro  $q_b$ , con  $\{q_a, q_b\} \in Q$ , con el tránsito  $Edges(q_0, q_2)$  no permitido en este caso, pues representaría pasar directamente del estado de espera  $q_0$  al estado de aplicación del pulso  $q_2$ .

Las **condiciones de tránsito** (denotadas *Guard*) [Goebel *et al* (2009), Tian *et al* (2004)], son los eventos discretos que dan lugar a los tránsitos entre mo-



dos. Quedan descritas ya sea por intervalos de tiempo ( $Timer(t) \geq t_w$ ), por valores de evento ( $y_{event_j} \geq y_k$ ) o por condiciones impuestas por el operador (Ctrl Off, Ctrl On), y son las que autorizan los tránsitos, de manera que cada  $Guard : Edges(q_a, q_b) \rightarrow R$  se identifica con las condiciones que deben cumplirse para cada posible tránsito  $(q_a, q_b) \in Edges$ . La tabla<sup>10</sup> 2.1 y la figura 2.12 muestran los diferentes sucesos de  $Guard$  asociados a cada tránsito.

Modos	$q_0^+$	$q_1^+$	$q_2^+$	Comentarios
$q_0$	Ctl Off	Ctl On	N.A.	Permanece si no se activa el control.
$q_1$	Ctl Off	$y_k < y_{av_k}$	$y_k > y_{av_k}$	Permanece hasta el evento $y_{event_j}$ .
$q_2$	Ctl Off	Timer $t_w$	Timer $\neq t_w$	Permanece durante el ancho del pulso.

Tabla 2.1: Tránsitos en  $Q \times Q$  y sus condiciones  $Guard$  asociadas;  $q_i$  es el modo origen (o actual) y  $q_j^+$  es el modo destino (o siguiente).

Tras cada tránsito, puede necesitarse una **aplicación de reposición del valor del estado**,  $Reset_x : Edges \times R^n \rightarrow R^n$ , que describe, para cada tránsito  $(q_a, q_b) \in Edges$ , el nuevo valor asignado al estado continuo  $x \in R^n$  durante la transición del modo  $q_a$  al modo  $q_b$ .

Como en este caso, a diferencia de otros métodos de control impulsivo [Matias y Güemez(1994), Tian *et al* (2004)], el vector de estado continuo  $x$  no es cambiado en los saltos de modo, todas las posibles aplicaciones de reposición del estado  $Reset(x) : Edges(q_a, q_b) \times R$ ,  $a, b \in \{1, 2, 3\}$   $a \neq b$  pueden tomarse como la identidad.

Los nuevos valores se denotan con el superíndice + en lo que sigue y en la figura 2.12.

Para la reposición de los valores que, tras el cambio de modo de  $q_1$  a  $q_2$ , tomarán las otras variables del algoritmo, se definen:

- $Reset(y_{kj}) : y_{kj}^+ = y_{av_k}$ ; lo que representa la asignación del valor de evento

<sup>10</sup>Nótese como la tabla recuerda a la de un autómata finito de Moore.

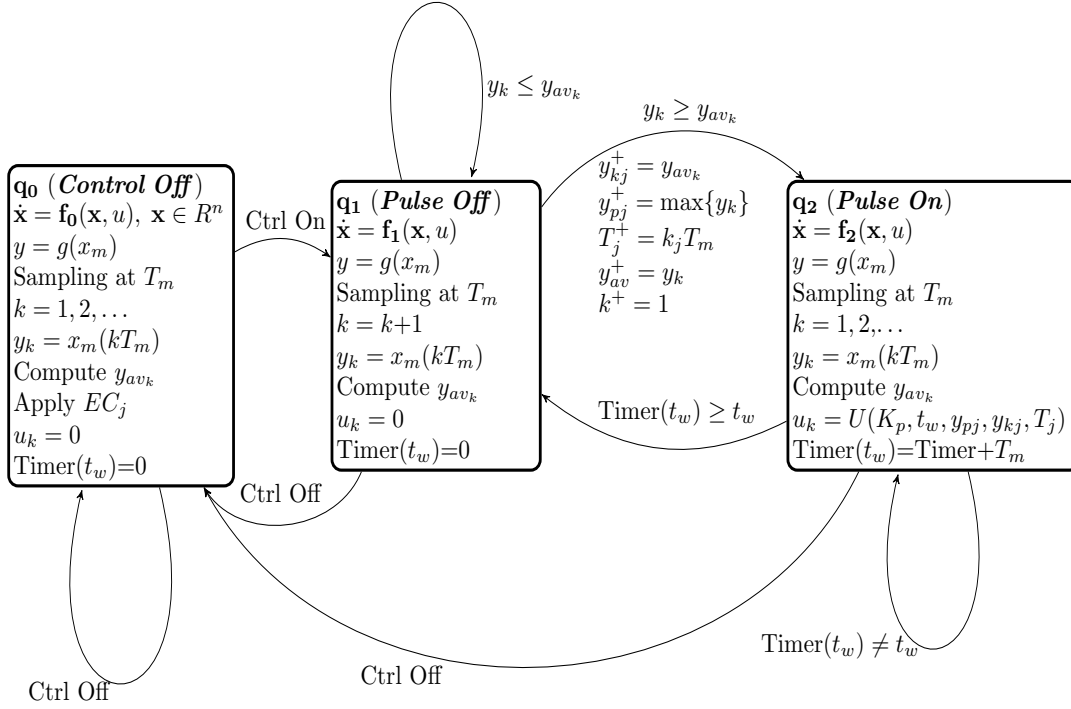


Figura 2.12: Esquema de la transición de estados en el algoritmo de control.

$$y_{kj} = y_{event_j} = y_{av_k}.$$

- $Reset(y_{pj}) : y_{pj}^+ = \max\{y_k\}$ ; para asignar el valor del último pico positivo.
- $Reset(T_j) : T_j^+ = k_j T_m$ ; lo que define el tiempo de vuelo como producto del número de muestras entre eventos  $k_j$  y el periodo de muestreo  $T_m$ .
- $Reset(k) : k^+ = 1$ ; lo que supone la reposición del contador de muestras.
- $Reset(y_{av}) : y_{av} = y_k$ ; lo que permite que la secuencia de las medias calculadas continúe sin saltos.

Si  $s = \{q_a, q_b, q_c, \dots, q_i, \dots\}$  es la **secuencia de estados discretos asociados con la trayectoria continua**  $\mathbf{x}(t)$  ([Tian et al (2004)]),  $s$  describe la **dinámica**

*simbólica del sistema* y el conjunto de pares  $w_i = (s_i, \mathbf{x}(t))$  determina la *trayectoria híbrida* del sistema.

Si en una trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  existe un  $T$  tal que  $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$ , se dice que el sistema recorre *una órbita continua de periodo  $T$* .

Si la secuencia de estados discretos  $s$  tiene la propiedad de que para un  $l$  dado  $s_{l+i} = s_i$ , entonces el sistema recorre *una órbita discreta de periodo  $l$* .

El objetivo del algoritmo considerado es que la trayectoria híbrida sea periódica, con una  $s_i = \{q_{1_i}, q_{2_i}\}$  que genere una trayectoria en el sistema continuo que resulte ser una órbita estabilizada (SPO) de periodo  $T_j$ .

## 2.8. El algoritmo como sistema conmutado

Otra forma de describir el método de control desarrollado es como sistema conmutado. Si se considera ya establecida la situación “bajo control”, en la que solo uno de los subsistemas continuos  $q_1$  y  $q_2$  está activo en cada momento del tiempo, puede describirse el sistema completo por una arquitectura de control híbrido por conmutación de dos controladores [Liberzon (2003), Sun y Ge (2005), Pérez (2012), Nagore *et al* (2013)], como se muestra en la figura 2.13, y con la misma descripción del proceso o sistema a controlar (real o simulado), pero con diferentes valores de la señal de control:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ u(t) &= U_q(K_p, t_w, y_{pj}, y_{event_j}, T_j)\end{aligned}$$

Las señales de conmutación necesarias  $\sigma(\cdot)$ , que activan a cada controlador y redefinen en cada conmutación la función  $U_q$ , (según sea la ley de control elegida 2.7 o 2.8), se generan por el supervisor ([Sun y Ge (2005), Nagore *et al* (2013)])

según las particulares aplicaciones  $\psi(\cdot)$  que correspondan.

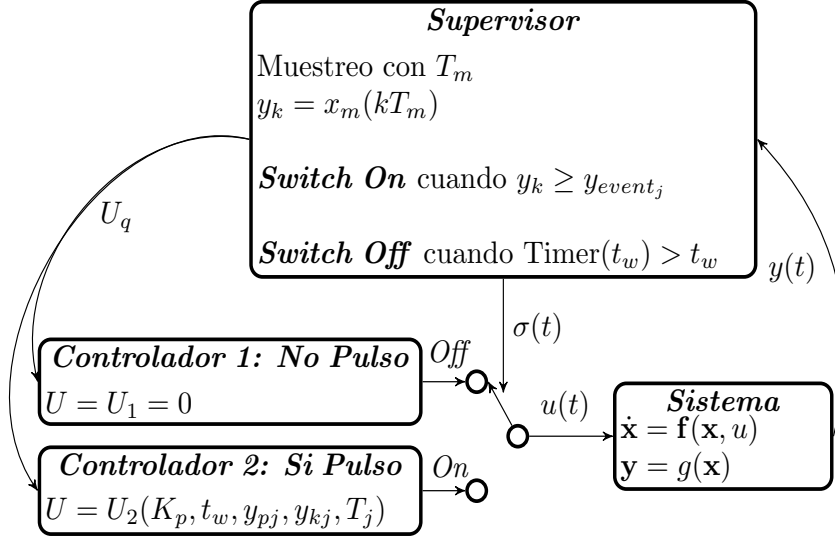


Figura 2.13: El algoritmo como sistema conmutado.

En este caso, la función de selección del controlador  $\sigma$ , es única y booleana ( $\sigma(t) \in \{0, 1\}$ ), quedando sujeta a la restricción del valor inicial (que define el controlador 1 donde la señal de control es nula –pulse off–), y para la que los valores (0,1) futuros que permiten la conmutación entre los controladores 1 y 2 –pulse off, pulse on–, quedan determinados por la función  $\psi$ , es decir:

$$\begin{aligned}\sigma(t_0) &= 0 \\ \sigma(t^+) &= \psi_{y_k}(y_{event}([t_{j-1}, t_j]), \text{Timer}([t_{j-1}, t_j]))\end{aligned}$$

siendo  $t_j$  cada instante de evento ( $t_0$  el valor inicial). De forma similar podrían definirse otras aplicaciones  $\psi(\cdot) : [t_{j-1}, t_j) \rightarrow R$ , si fueran necesarias para distintas variables implicadas en el algoritmo, según cada condición de control o controlador activo en cada momento.

## **2.9. Análisis de estabilidad**

El carácter no lineal del método de control propuesto (en tiempo discreto, basado en eventos variables, con cuatro variantes para la ley de control), junto con el hecho de que se utilicen condiciones de evento variables en el tiempo, (basadas en datos muestreados entre dos eventos consecutivos), dificulta la justificación teórica y análisis de estabilidad del sistema bajo control (2.1), de manera que la prueba de estabilidad se establece por los resultados obtenidos por simulación numérica y por la realización física que se discute en los dos siguientes capítulos.

Por esta reconocida dificultad, y puesto que entre los objetivos propuestos no figura tener que realizar un análisis teórico sobre las condiciones de estabilidad de los algoritmos, pues el trabajo se centra en las experiencias de control por realimentación en sistemas caóticos particulares, el análisis sobre la estabilidad en lazo cerrado queda como una línea abierta para trabajos posteriores.



## **Capítulo 3**

### **Resultados de simulación numérica**





### 3.1. Introducción

Para simular el comportamiento del algoritmo de control, se han seleccionado varios sistemas con dinámica caótica. La simulación numérica del sistema a controlar se ha realizado utilizando el método de integración de Runge-Kutta de cuarto orden, con paso de integración ( $\Delta t$ ) fijo. Se han considerado aspectos relacionados con la implementación práctica, tales como el ruido de medida, la limitación de la señal de control aplicada, el periodo de muestreo, la variabilidad en las condiciones iniciales y también en el instante de aplicación del control.

En la simulación de cada modelo, se han usado generalmente los valores y condiciones iniciales que aparecen en las referencias seleccionadas; el paso de integración ( $\Delta t$ ) se ha elegido con el orden de magnitud necesario para obtener unos resultados de simulación correctos.

Aunque, en algunos casos, se han encontrado ciertas dificultades para conseguir el control con otras combinaciones de variable medida ( $x_m$ ) y de control ( $\dot{x}_c$ ) distintas a las elegidas en cada sistema estudiado, los resultados de simulación que se presentan no deben considerarse únicos, pues también se han logrado resultados periódicos con otras combinaciones de señal medida y punto de aplicación del control.

El periodo de muestreo  $T_m$  se elige en cada caso de acuerdo con las características dinámicas del sistema simulado; también se ha asignado un retardo al lazo de control  $T_d$  igual a un periodo de muestreo, de manera que pudiera implementarse el controlador en un sistema de control en tiempo real estricto, como se verá en el capítulo 4.

En las simulaciones tipo Monte-Carlo realizadas se ha encontrado robustez frente al cambio de parámetros, poca sensibilidad al ruido, a las condiciones iniciales y, una vez que se ha llegado al régimen caótico, al momento de aplicación del control.

## 3.2. Primeras simulaciones

En esta sección se muestran los resultados de las primeras experiencias con el algoritmo de control en su forma básica (Unipolar+). Para realizar los test de prestaciones y comportamiento del mismo frente al ruido, se han considerado sistemas caóticos con valores de los parámetros y condiciones iniciales descritos en las referencias que se señalan en cada caso. Los valores de los parámetros del controlador así como los tiempos de inhibición y de aplicación del control también quedan especificados para cada una de las simulaciones realizadas.

### 3.2.1. Sistema de Lorenz

El conocido atractor de Lorenz [Lorenz (1963)], queda definido por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_1 x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_3 + x_1 x_2\end{aligned}\tag{3.1}$$

Los valores de los parámetros para los cuales el sistema (3.1) resulta caótico [Lorenz (1963), González-Miranda (2004)], son:  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$ , con condiciones iniciales  $x_1(0) = 8.04$ ;  $x_2(0) = 8.30$ ;  $x_3(0) = 3.81$ .

A continuación se presentan los resultados de simulación numérica con el algoritmo de control propuesto, cuando se supone medible la tercera variable de estado, es decir,  $y = x_3$ , y cuando la acción de control  $u$  se aplica en el lado derecho de la segunda ecuación de (3.1). El paso de integración es  $\Delta t = 10^{-6}$  s. Para el controlador se han fijado un periodo de muestreo  $T_m = 1$  ms, un ancho de pulso de  $t_w = 1$  ms, un retardo simulado  $T_d = 1$  ms, y una ganancia  $K_p = 10$ .

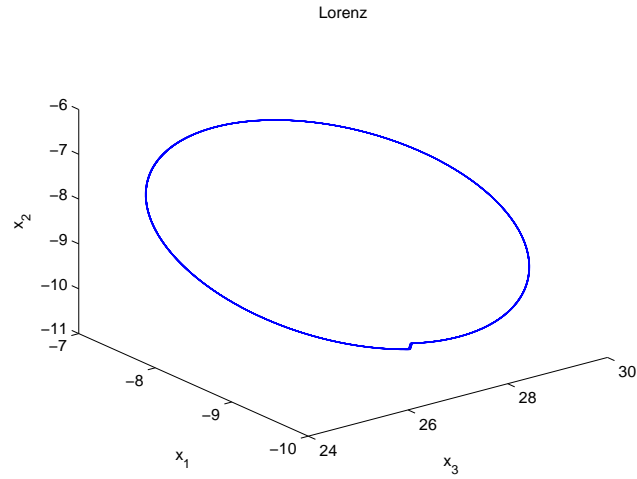


Figura 3.1: Órbita estabilizada en el sistema de Lorenz después de  $t > 80$  s.

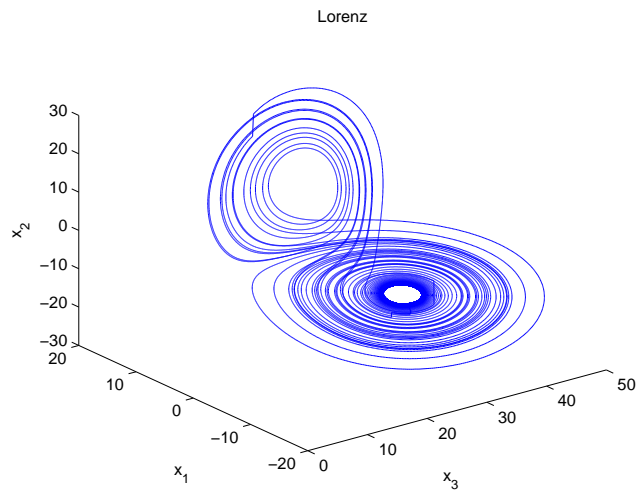


Figura 3.2: Tránsito a la órbita estabilizada en Lorenz.

En la figura 3.1 se observa, en el espacio de estados, la trayectoria periódica obtenida tras el transitorio, y la figura 3.3 muestra el comportamiento con el tiempo de las variables de estado. Nótese el cambio de comportamiento hacia la órbita finalmente estabilizada y su permanencia en el tiempo.

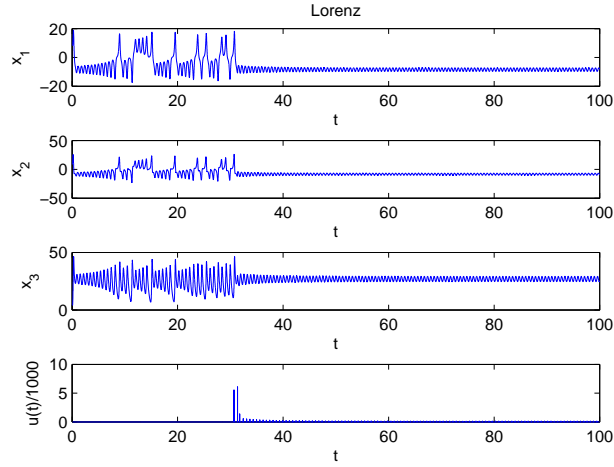


Figura 3.3: Señales de estado y de control en el sistema de Lorenz. El control se aplicó en  $t = 30$  s.

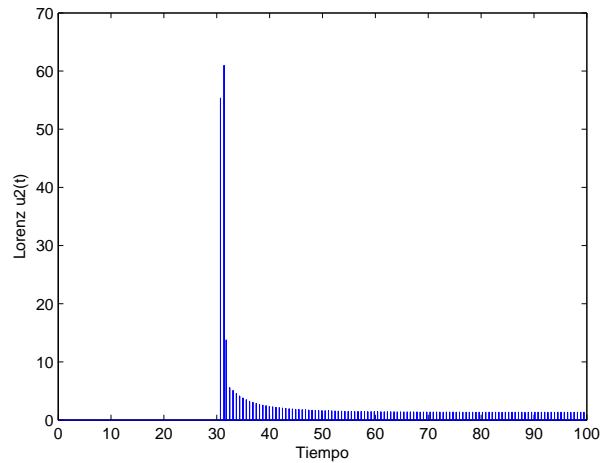


Figura 3.4: Detalle de la señal de control. El control se aplicó en  $t = 30$  s.

La figura 3.4 muestra ampliada la señal de control para que se aprecie el decaimiento de la amplitud de los pulsos, y también para hacer notar que, en estas primeras simulaciones, no se consideran las magnitudes físicas ni el significado físico del modelo ni de sus variables, sino que a estos sistemas dinámicos, se les trata por ahora como *objetos matemáticos*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>[...] un objeto matemático que tiene especial relevancia para la ingeniería. Se trata del concepto de sistema dinámico mediante el que es posible representar algo tan sutil como es el com-

### 3.2.2. Sistema de Chen

El sistema de Chen [Chen y Ueta (1999)], queda descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}\tag{3.2}$$

Para conseguir un comportamiento caótico, los parámetros del modelo son  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$ ; y las condiciones iniciales  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = -10$ ,  $x_3(0) = 10$ .

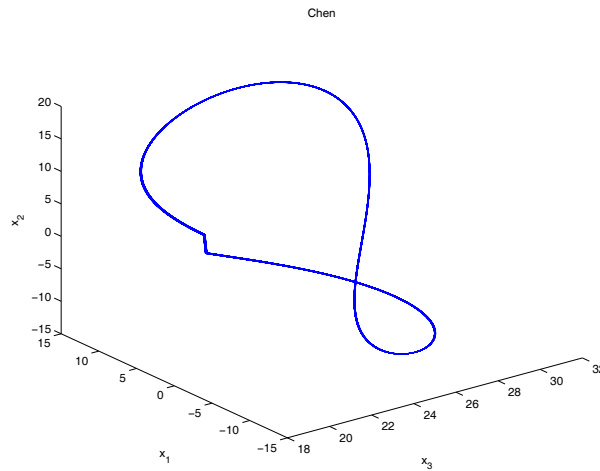


Figura 3.5: *izda.* Órbita estabilizada en el sistema de Chen ( $t > 80$  s.).

---

*portamiento, entendido como evolución en el tiempo, de las variables involucradas en un proceso [...] El sistema dinámico, de forma semejante a los objetos elementales de la geometría, constituye uno de los objetos matemáticos más fecundos que se han concebido nunca. [Aracil (1999)]*

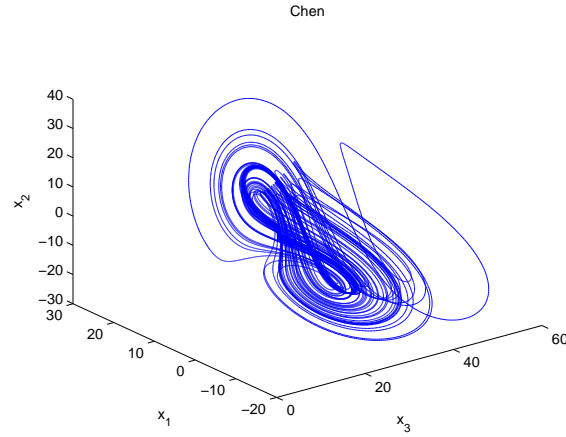


Figura 3.6: Transición a la órbita finalmente estabilizada en el sistema de Chen.

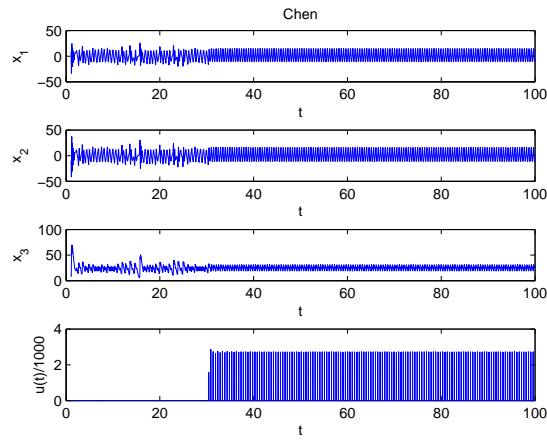


Figura 3.7: Sistema de Chen. Señales. El control se aplica en  $t = 30$  s.

Para simular el algoritmo de control, se supone que la medida se corresponde con la primera variable de estado, es decir,  $y = x_1$ , y que se aplica el control en el lado derecho de la segunda ecuación del sistema de Chen (3.2). Se emplea un paso de integración  $\Delta t = 10^{-6}$  s. Para el controlador se han usado los siguientes valores de sus parámetros  $T_m = 1$  ms.,  $t_w = 1$  ms.,  $T_d = 1$  ms., y  $K_p = 7$ .

### 3.2.3. Sistema de Lu

En el atractor de Lu [Lu *et al* (2002)], aunque son equivalentes a los obtenidos con otras variables medidas, los resultados que se presentan se han obtenido al suponer igualmente que resulta accesible para la medida la tercera variable de estado, es decir  $y = x_3$ , y que también se puede aplicar el control en el lado derecho de la segunda ecuación de (3.3).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3\end{aligned}\tag{3.3}$$

Los valores de los parámetros del modelo son  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$ ; y las condiciones iniciales  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = -10$ ,  $x_3(0) = 10$ .

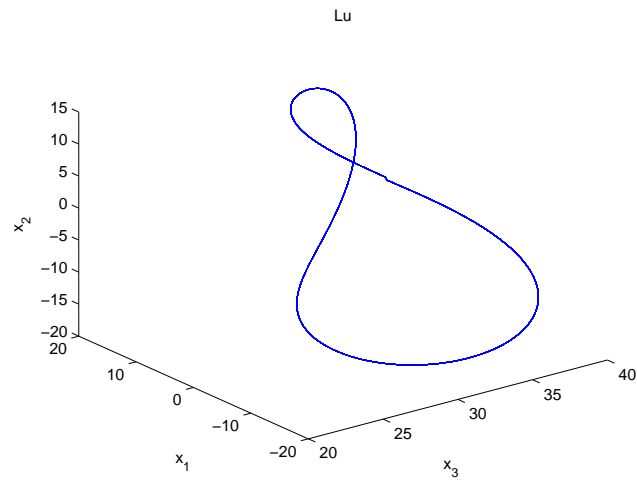


Figura 3.8: Órbita estabilizada en el sistema de Lu ( $t > 80$  s.).

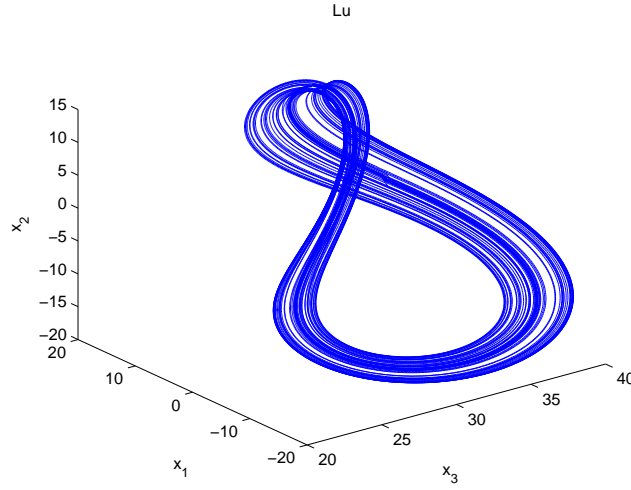


Figura 3.9: Transición a la órbita finalmente estabilizada en el sistema de Lu.

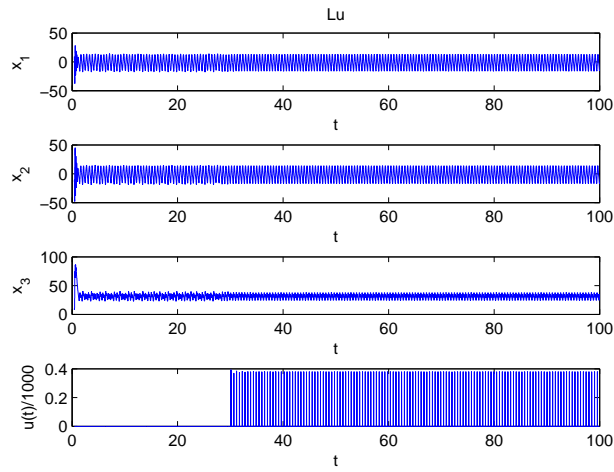


Figura 3.10: Sistema de Lu. Señales. El control se aplica en  $t = 30$  s.

Para la simulación se ha usado un paso de integración de  $\Delta t = 10^{-6}$  s. Los parámetros del controlador son, para el periodo de muestreo  $T_m = 1$  ms., para el ancho de pulso  $t_w = 1$  ms., un retardo equivalente a una muestra  $T_d = 1$  ms., y una ganancia de  $K_p = 1$ .



### 3.2.4. Sistema de Liu

El sistema de Liu [Liu *et al* (2004)], viene descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= bx_1 - kx_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + hx_1^2\end{aligned}\tag{3.4}$$

A la hora de simular el comportamiento del algoritmo de control sobre este sistema, se ha supuesto medible la primera variable de estado ( $y = x_1$ ), y que se aplica control en el lado derecho de la segunda ecuación de(3.4).

Los valores de parámetros y condiciones iniciales utilizadas son  $a = 10$ ,  $b = 40$ ,  $c = 2.5$ ,  $k = 1$ ,  $h = 4$ ,  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = -10$ ,  $x_3(0) = 10$ .

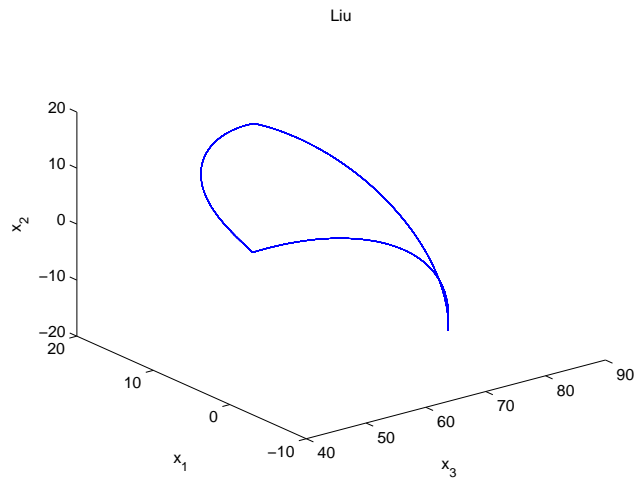


Figura 3.11: Órbita estabilizada en el sistema de Liu ( $t > 80$  s.).

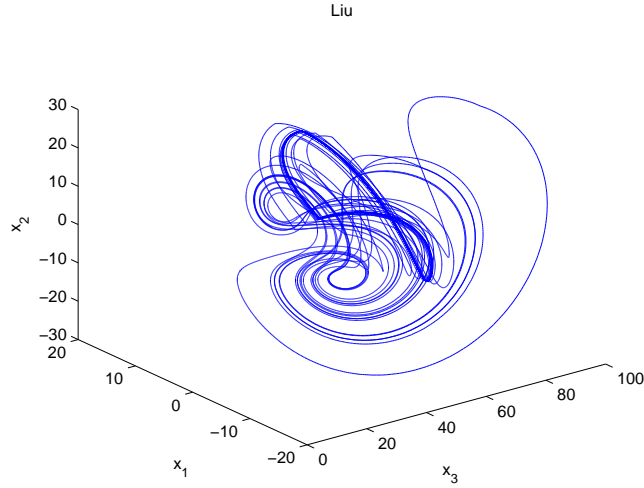


Figura 3.12: Transición a la órbita finalmente estabilizada en el sistema de Liu.

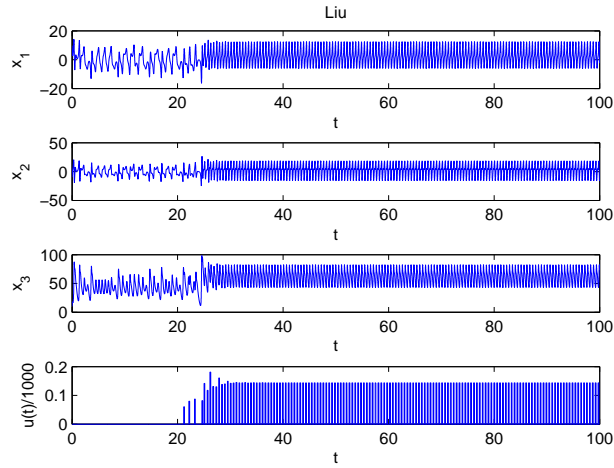


Figura 3.13: Sistema de Liu. Señales. El control se aplicó en  $t = 20$  s.

La simulación se llevó a cabo con un paso de integración de  $\Delta t = 10^{-6}$  s. Para el controlador, se utilizó un tempo de muestreo  $T_m = 1$  ms., un ancho de pulso de  $t_w = 150$  ms.,  $T_d = 1$  ms. y una ganancia de  $K_p = 120$ .

### 3.3. Análisis de sensibilidad

#### 3.3.1. Sensibilidad al ruido de medida

Para mostrar la eficacia del algoritmo de control frente al ruido, se han realizado simulaciones sobre los mismos sistemas presentados en las secciones anteriores, señalándose en cada caso los niveles de ruido y los valores a los que se ha ajustado el intervalo de tiempo de inhibición  $t_{holdoff}$ . El mantenimiento de la amplitud de la órbita periódica bajo condiciones de ruido de medida puede requerir además, una corrección de la ganancia proporcional  $K_p$ .

El sistema de Lorenz presentado en la sección 3.2.1, se ha vuelto a simular incorporando un nivel de ruido de  $\pm 2\%$  de la magnitud medida. Para el controlador se han fijado los mismos valores del tiempo de muestreo  $T_m = 1$  ms. y ancho de pulso  $t_w = 1$  ms.,  $T_d = 1$  ms., y para tratar de obtener la misma amplitud, se ha reducido la ganancia a  $K_p = 10$ . Además, se ha fijado el intervalo de tiempo del discriminador a  $t_{holdoff} = 300$  ms.

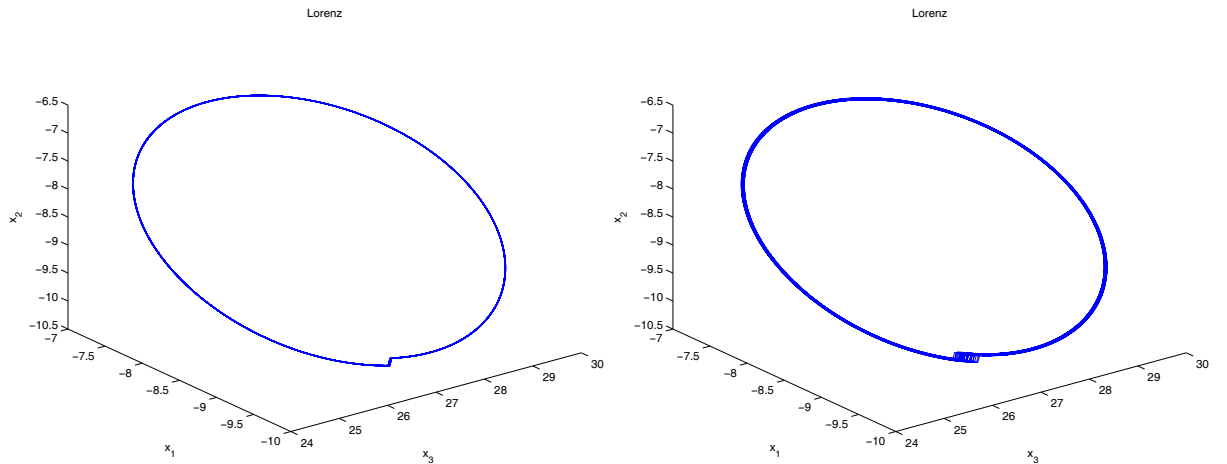


Figura 3.14: Sistema de Lorenz. *izda.* Órbita estabilizada ( $t > 80$  s.). *dcha.* Con ruido de  $\pm 2\%$  y  $t_{holdoff} = 300$  ms. ( $t > 80$  s.)

Si se compararan las dos órbitas puede observarse el efecto de este nivel de ruido de medida que, como se aprecia, ocasiona una desviación de la órbita a otras

muy cercanas, situadas en una banda o zona próxima a la órbita obtenida sin ruido de medida.

En el sistema de Chen (sección 3.2.2), en la figura 3.15) compárense las órbitas obtenidas sin ruido y con un ruido del  $\pm 2\%$ , ambas con  $K_p = 7$  y  $t_{holdoff} = 300$  ms.

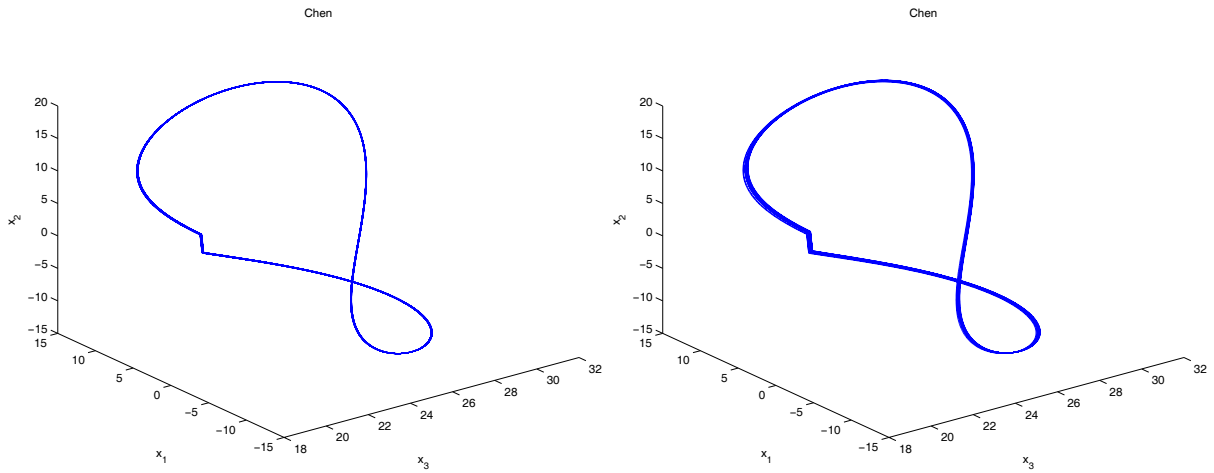


Figura 3.15: Sistema de Chen. *izda.* Órbita estabilizada ( $t > 80$  s.). *dcha.* Con ruido de  $\pm 2\%$  y  $t_{holdoff} = 300$  ms. ( $t > 80$ )

Para el sistema de Lu (sección 3.2.3), véase la figura 3.16, que muestra las órbitas simuladas sin ruido y con ruido. Esta última se ha obtenido con un nivel de ruido del  $\pm 2\%$ , una ganancia  $K_p = 1$  y un  $t_{holdoff} = 500$  ms.

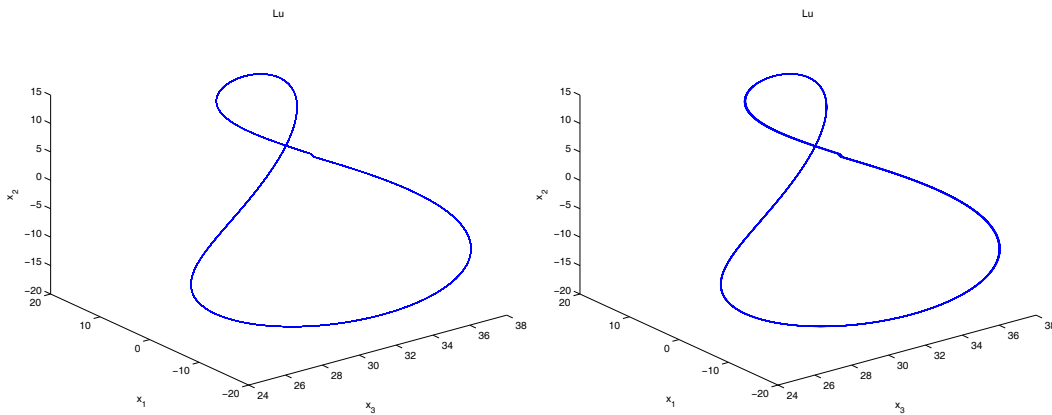


Figura 3.16: Sistema de Lu. *izda.* Órbita estabilizada ( $t > 80$  s.). *dcha.* Con ruido de  $\pm 2\%$  y  $t_{holdoff} = 500$  ms. ( $t > 80$ )

En el sistema de Liu (sección 3.2.4), en la figura 3.17 se muestran los resultados simulados sin ruido y bajo un nivel de ruido del  $\pm 2\%$ , con  $K_p = 120$  y  $t_{holdoff} = 300$  ms.

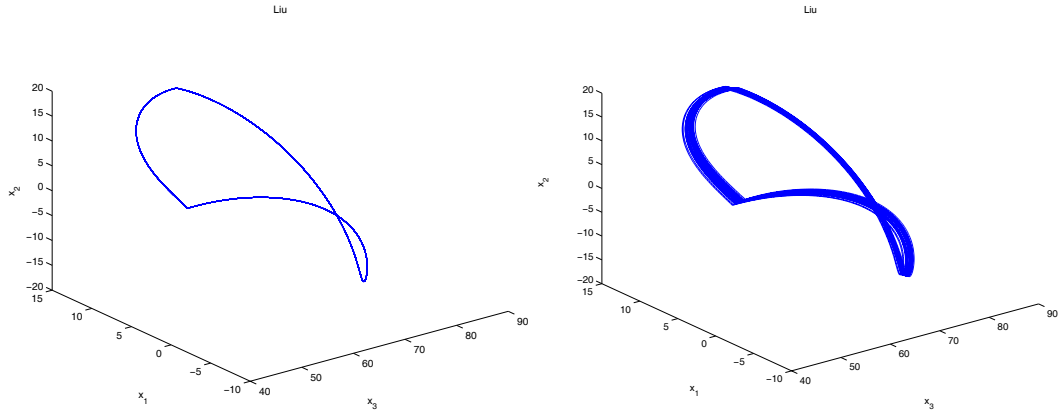


Figura 3.17: Sistema de Liu. *izda.* Órbita estabilizada ( $t > 80$  s.). *dcha.* Con ruido de  $\pm 2\%$  y  $t_{holdoff} = 300$  ms. ( $t > 80$ )

### 3.3.2. Sensibilidad a las condiciones de simulación

Para estudiar la sensibilidad del algoritmo frente a las condiciones iniciales y al instante de aplicación del control, se han realizado simulaciones de tipo Monte-Carlo. Se ha considerado que tanto las condiciones iniciales como el instante en el que el operador aplica el control, se presentan según un modelo de comportamiento aleatorio, con una distribución uniforme de media cero.

Puesto que los sistemas a los que les es aplicable este método de control ya se encuentran en régimen caótico y dado que, como es sabido, este tipo de comportamiento es muy sensible a las condiciones iniciales y parámetros propios de cada modelo, en estas simulaciones se han dejado fijos los valores de los parámetros de los modelos para asegurar que la condición de operación resultante, antes de la aplicación del control, es caótica en todos los casos. Así mismo se ha cambiado en cada simulación el instante de aplicación del control o las condiciones iniciales.

La tabla 3.1 muestra los rangos utilizados en las simulaciones. Si bien el rango para el momento de aplicación del control puede ser cualquier otro, el rango de las condiciones iniciales queda sometido a valores de las cuencas de atracción.

Sistema	Aplicación del control		C. iniciales	
	Min	Max	Min	Max
Lorenz	15 s	45 s	-10	+10
Chen	15 s	45 s	-10	+10
Lu	15 s	45 s	-10	+10
Liu	15 s	45 s	-10	+10

Tabla 3.1: Rangos para las simulaciones

Todas las simulaciones se han realizado bajo las condiciones de ruido, paso de integración, periodo de muestro y parámetros del controlador señaladas en la sección 3.3.1.

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (s)		Promedio del máximo $ypk$	
		media	d. típica	media	d. típica
Lorenz	230	0.609	0.060	29.686	0.162
Chen	230	0.487	0.001	15,119	0.052
Lu	230	0.532	0.064	15.360	1.679
Liu	230	0.536	0.004	12.569	0.087

Tabla 3.2: Resultados en estacionario

La tabla 3.2 resume los resultados en la situación estacionaria observada en el último ciclo que tuvo lugar antes de que se cumpliera el tiempo final de cada simulación y que, para cada caso, son los señalados en las figuras de la sección 3.4.

Cabe señalar la reproducibilidad de condición de operación resultante en los sistemas de Lorenz, Chen, Lu y Liu, en los que la variabilidad encontrada, tanto

para las amplitudes como para los tiempos de retorno o de vuelo, parece que puede considerarse fundamentalmente debida al ruido de medida y, en menor grado, a la variación, dentro de los rangos establecidos, de las condiciones iniciales y del momento de activar el controlador.

### 3.3.3. Sensibilidad a los parámetros del controlador

Los parámetros temporales del controlador (ver 2.2.3), cuyos valores ha de fijar el operador de control según la reglas de ajuste presentadas en 2.6, son el periodo de muestreo  $T_m$  y el ancho del pulso  $t_w$ . La importancia en la dinámica resultante de ambos<sup>2</sup> ya se consideró en 2.4.2. Dado que estos parámetros temporales no suelen retocarse una vez elegidos y dado que su variabilidad por las condiciones de funcionamiento puede considerarse mínima (frente a la de otros parámetros presentes en el sistema de lazo cerrado), se ha considerado que el análisis de sensibilidad de los parámetros del controlador puede reducirse a estudiar, para la órbita estabilizada obtenida, la sensibilidad a la ganancia  $K_p$ .

La tabla 3.3 muestra los resultados tras un análisis de Monte-Carlo con 150 simulaciones realizadas a los sistemas que se señalan, usando los mismos valores de parámetros de cada modelo, las mismas condiciones iniciales, las mismas condiciones de simulación y los mismos parámetros temporales del controlador que se señalaron para cada sistema simulado en las secciones anteriores. El rango de variabilidad de la ganancia se refleja en la tabla para cada caso. Al comparar estos resultados con los del análisis de cada sistema, se ha observado que hay poca sensibilidad de la órbita estabilizada resultante a los cambios moderados de la ganancia, afectando ligeramente a las amplitudes y tiempos de vuelo que la caracterizan.

---

<sup>2</sup>Puede añadirse si se desea el tiempo de inhibición del controlador  $t_{holdoff}$ , aunque al considerar su función y someterlo a la misma argumentación que para  $T_m$  o  $t_w$ , tampoco procede realizar un análisis de sensibilidad para este parámetro.

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (s)		Promedio del máximo $ypk$		Variación de la ganancia		
		media	d. típica	media	d. típica	rango	media	d. típica
Lorenz	150	0.627	0.004	30.619	0.572	8 - 12	10.01	1.15
Chen	150	0.481	0.032	14.994	0.051	5.6 - 8.4	7.21	0.83
Lu	150	0.547	0.097	15.965	0.680	0.80 - 1.20	1.03	0.11
Liu	150	0.567	0.097	12.257	1.125	97 - 143	120.1	13.8

Tabla 3.3: Resultados en estacionario mostrando la sensibilidad al cambio de la ganancia  $K_p$ .

### 3.4. Otros resultados de simulación numérica

Con el fin de simular sistemas que puedan ser materializados, se han estudiado varios modelos de osciladores electrónicos con comportamiento caótico. Como en las primeras simulaciones, los valores asignados a los parámetros de los modelos de los sistemas simulados son los recogidos en las referencias respectivas. Para la simulación numérica del comportamiento de los circuitos se ha usado un integrador de Runge-Kutta de cuarto orden, de paso fijo ( $\Delta t$ ) cuyo valor se indica en cada uno de los casos analizados. También se ha especificado el valor de la tensión de saturación de los mismos.

Para simular el ruido, se ha añadido al valor calculado de la medida una cantidad aleatoria con distribución uniforme, en un rango  $\pm ruido$  mV, según la expresión  $V_{ruido} = ((0,5 - RND)/500) \cdot ruido$  mV, donde  $RND$  es un número aleatorio, comprendido entre 0 y 1.

También se han realizado simulaciones de tipo Monte-Carlo para considerar la sensibilidad del algoritmo de control frente a las condiciones iniciales  $[x_i(0)]_n$  y el momento de aplicación del control  $[t_{on}]_n$ , afectándolas en el experimento  $n$ -ésimo de una variabilidad de la forma  $[x_i(0)]_n = [x_i(0)]_1(1 + (0,5 - RND))$  y  $[t_{on}]_n = [t_{on}]_1(1 + (0,5 - RND))$ , donde  $[x_i(0)]_1$  y  $[t_{on}]_1$  son las condiciones



iniciales y momento de aplicación del control del primer experimento, cuyo valor se declara en cada uno de los casos que se describen a continuación; en ellos se señalan también dos estadísticos (media y desviación típica) de dos indicadores de la órbita encontrada: el tiempo de vuelo  $T_j$  y el valor del pico positivo  $y_{pj}$  del último ciclo calculado.

En las primeras simulaciones se empezó probando el modo básico de control, es decir, el denominado Unipolar+, para posteriormente, probar en el mismo sistema caótico las otras tres variantes (Unipolar-, Bipolar+ y Bipolar-).

### 3.4.1. Oscilador de Colpitts

El oscilador de Colpitts [DeFeo *et al* (2000), Kennedy (1994)], cuyo circuito se muestra en la figura 3.18, se ha simulado observando la tercera variable  $y = x_3$  que se corresponde con la corriente de colector que atraviesa la bobina, aplicando el control en el lado derecho de la segunda ecuación de (3.5), es decir, en el emisor sobre el condensador  $C_2$ .

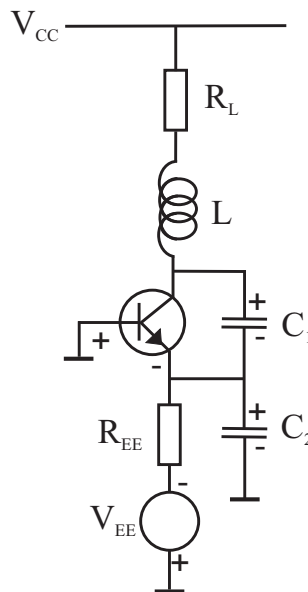


Figura 3.18: Oscilador de Colpitts ( [Kennedy (1994)]).

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (1/C_1)(-\alpha f(x_2) + x_3) \\
\dot{x}_2 &= (1/C_2)((1 - \alpha)f(x_2) - g_0 x_2 + x_3 - (I_0)) + u \\
\dot{x}_3 &= (1/L)(-x_1 - x_2 - R_L x_3 + V_{cc}) \\
f(x_2) &= (I_{sat}/\alpha) \exp(-x_2/v_T)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Los valores de los parámetros del modelo son los utilizados habitualmente [Kennedy (1994)]:  $\alpha = 0.99$ ,  $I_{sat} = 10^{-15}$  A.,  $v_T = 27 \times 10^{-3}$  V.,  $R_L = 35\Omega$ ,  $R_{ee} = 400\Omega$ ,  $g_0 = 1/R_{ee}\Omega^{-1}$ ,  $V_{cc} = 5$  V.,  $V_{ee} = 5$  V.,  $L = 98.5 \times 10^{-6}$  H.,  $I_0 = V_{ee}/R_{ee}$  A.,  $C_1 = 54 \times 10^{-9}$  F.,  $C_2 = 54 \times 10^{-9}$  F.

Para la simulación de (3.5) dada la alta frecuencia de las oscilaciones, se ha usado un paso de integración  $\Delta t = 10^{-10}$  s., con unas condiciones iniciales  $[x_1(0)]_1 = 0$ ,  $[x_2(0)]_1 = 0$ ,  $[x_3(0)]_1 = -1 \times 10^{-3}$ . En el controlador,  $T_m = 10$  ns.,  $t_w = 10$  ns.,  $T_d = 10$  ns. y  $K_p = 150000$ <sup>3</sup>. La figura 3.19 muestra una trayectoria estabilizada. El comportamiento en el tiempo se observa en la figura 3.20.

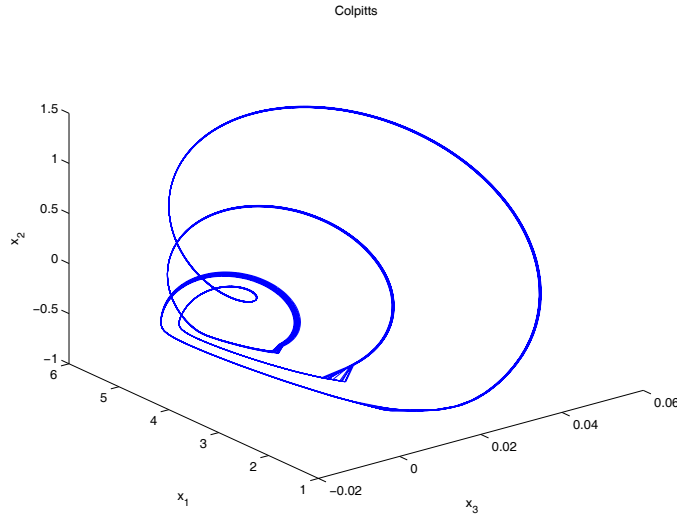


Figura 3.19: Órbita estabilizada en el oscilador de Colpitts para  $t > 10^{-3}$  s. El control se aplica en  $t = 5 \times 10^{-4}$  s.

<sup>3</sup>En este caso las dimensiones de  $K_p$  son  $V \cdot s \cdot A^{-2}$ .

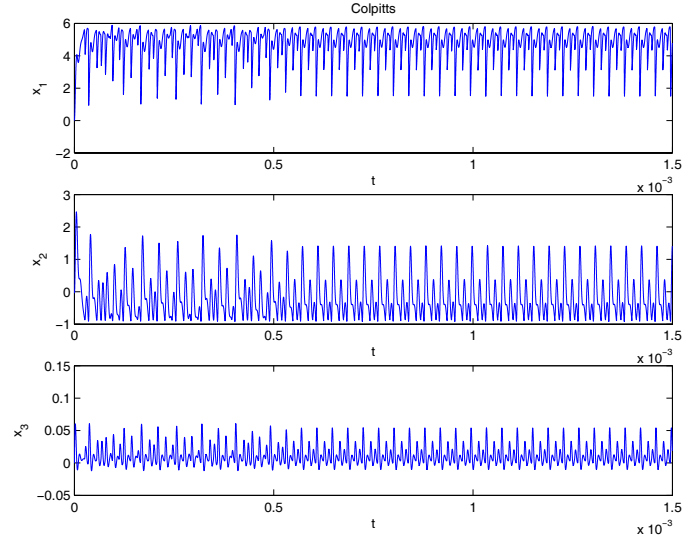


Figura 3.20: Oscilador de Colpitts. El control se aplica en  $t = 5 \times 10^{-4}$  s.

El oscilador de Colpitts se ve muy afectado por el ruido de medida y la aparición de falsos eventos. Al comparar las figuras 3.19 y 3.21, se aprecia el efecto del ruido y también cómo el controlador mantiene las trayectorias muy próximas a la que se obtuvo al simular sin ruido de medida.

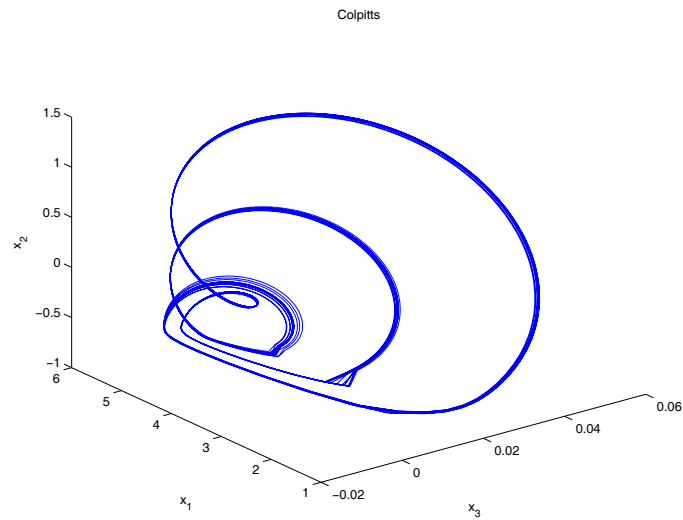


Figura 3.21: Oscilador de Colpitts. Ruido  $\pm 2\%$ ;  $t_{holdoff} = 0.005$  ms. ( $t > 10^{-3}$  s.)

Sistema	Aplicación del control		C. iniciales	
	Min	Max	Min	Max
Colpitts	400 $\mu$ s	600 $\mu$ s	$-5 \times 10^{-4}$	$+5 \times 10^{-4}$

Tabla 3.4: Oscilador de Colpitts. Rangos para las simulaciones

Al realizar un ensayo tipo Monte-Carlo con 450 simulaciones con los rangos especificados en la tabla 3.4, los resultados en estacionario, para la última observación, muestran para el oscilador de Colpitts tres conjuntos de medidas diferentes, señalados como (i), (ii) y (iii) en la tabla 3.5.

El caso (i) agrupa los ciclos rápidos menos distinguibles de la órbita mostrada en la figura 3.21, mientras que los casos (ii) y (iii) se refieren a los ciclos de mayor amplitud de la misma.

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno ( $\mu$ s)		Promedio del máximo $y_{pk}$ (A)	
		media	d. típica	media	d. típica
Colpitts (i)	173	8.064	0.155	0.020	0.001
Colpitts (ii)	136	11.154	0.059	0.034	0.001
Colpitts (iii)	141	19.275	0.040	0.055	0.001

Tabla 3.5: Oscilador de Colpitts. Resultados en estacionario.

Con el objeto de estudiar la sensibilidad de la órbita a los cambios de la ganancia  $K_p$  iniciales  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = -1 \times 10^{-3}$ . En el controlador, un periodo de muestreo  $T_m = 10$  ns. un ancho del pulso  $t_w = 10$  ns., el control se aplicó en  $T_{on} = 0,5 \times 10^{-3}$  y se simuló hasta  $T_{off} = 1,5 \times 10^{-3}$ . La ganancia nominal se fijó en  $K_p = 150000$ . Los resultados que se muestran en la tabla 3.6, señalan que, en algunos casos, los últimos valores medidos revelan que la órbita promedio obtenida está próxima a la del caso (i) de la tabla 3.5; en otros casos, está próxima a la del caso (ii) y finalmente, en casos las ultimas medidas caracterizan en promedio al tipo (iii).

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno ( $\mu s$ )		Promedio del máximo $y_{pk}$ (A)		Variación de la ganancia		
		media	d. típica	media	d. típica	rango	media	d. típica
Colpitts (i)	68	7.73	1.53	0.025	0.011	149702 - 150278	149952	181.5
Colpitts (ii)	48	11.11	0.92	0.037	0.003	149715 - 150283	149964	141.6
Colpitts (iii)	36	19.62	1.49	0.057	0.007	149701 - 150296	150035	172.0

Tabla 3.6: Oscilador de Colpitts. Resultados en estacionario con control unipolar mostrando la sensibilidad al cambio de la ganancia  $K_p$ .

### 3.4.2. Circuito de González

El oscilador de puente de Wien modificado de González [González *et al* (2005)], cuyo circuito básico se muestra en la figura 3.24, responde a un sistema caótico que, con un único punto de equilibrio, queda descrito por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= (1/L)(f - R_L x_1 - x_2) \\
 \dot{x}_2 &= (1/C)x_1 \\
 \dot{x}_3 &= (1/C_1)(x_1 - x_3/R) \\
 f &= (A/2)(|x_3 + V_S/A| - |x_3 - V_S/A|) - x_3
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Se ha supuesto que  $y = x_3$  y que se aplican los pulsos de control en el lado derecho de la segunda ecuación de 3.7.

Se ha simulado con los siguientes valores de los parámetros:  $L = 0,1$  H.,  $C = 100 \times 10^{-9}$  F.,  $C_1 = 470 \times 10^{-9}$  F.,  $R_L = 90\Omega$ ,  $R = 23 \times 10^3 \Omega$ ,  $A = 5.8$ ,  $V_s = 14$  V., y se ha usado  $\Delta t = 10^{-8}$  s. Como condiciones iniciales  $x_1(0) = 10^{-6}$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0$ . En el controlador  $T_m = 1 \times 10^{-5}$  s.,  $t_w = 1 \times 10^{-5}$ ,

$T_d = T_m$ , y  $K_p = 7.5$ .

En este sistema de González se ha simulado con un ruido del  $\pm 2\%$ , y con  $t_{holdoff} = 100$  ms.

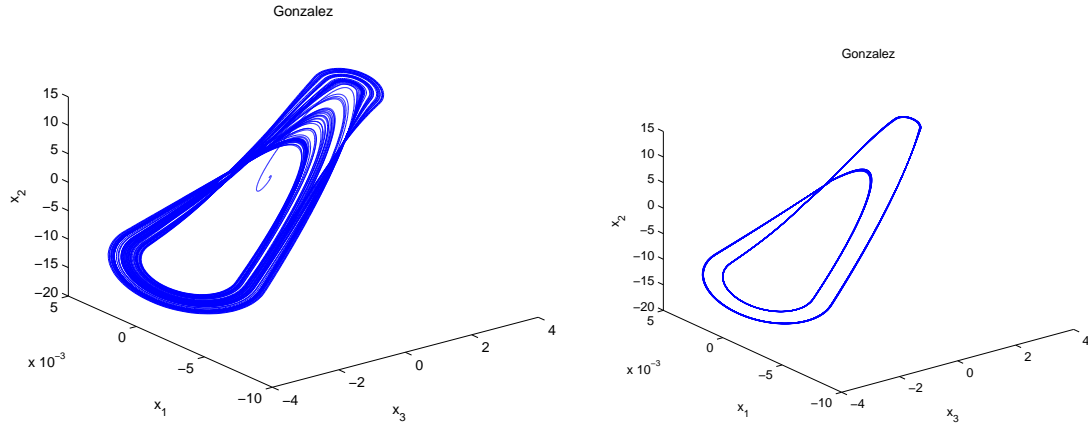


Figura 3.22: Tránsito y órbita estabilizada en el sistema de Gonzalez ( $t > 0.2$  s.). El control unipolar no limitado se aplicó en  $t = 0.1$  s.

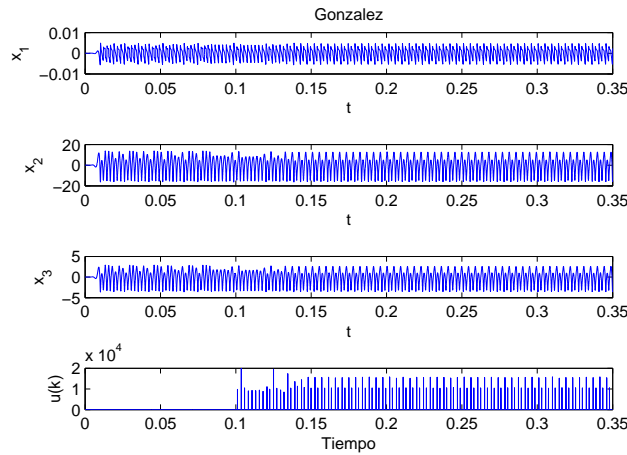


Figura 3.23: Señales en el sistema de González. El control no limitado; se aplicó en  $t = 0.1$  s.

En el sistema se ha realizado un ensayo tipo Monte-Carlo con 335 simulaciones, considerando  $y = x_3$ , con el control aplicado en el lado derecho de

la segunda ecuación, y con los siguientes valores de los parámetros:  $L = 0.1$  H,  $C = 100 \times 10^{-9}$  F,  $C_1 = 470 \times 10^{-9}$  F,  $R_L = 90\Omega$ ,  $R = 23 \times 10^3\Omega$ ,  $R_s = 100 \times 10^3\Omega$ ,  $A = (1 + R_1/R_2) = 5.8$ ,  $V_s = 14$  V, y se ha usado  $\Delta t = 10^{-8}$  s. Como condiciones iniciales  $[x_1(0)]_1 = 0.005$ ,  $[x_2(0)]_1 = 0.05$ ,  $[x_3(0)]_1 = 0.05$ . En el controlador  $K_p = 7,5^4$   $T_m = 1 \times 10^{-5}$  s,  $t_w = 0.2$  ms,  $t_{holdoff} = 0.5$  ms.

En la tabla 3.8 aparecen también dos conjuntos de valores para las órbitas estabilizadas, señalados como (i) y (ii). Los valores mostrados para cada uno de ellos se refieren al hecho de que las medidas de tiempo de retorno y de valor de pico, se tomaron al finalizar el tiempo de simulación, sobre uno u otro de los dos ciclos de la órbita (2-periódica) mostrada en la figura 3.22.

Sistema	Aplicación del control		C. iniciales	
	Min	Max	Min	Max
Gonzalez	7.5 ms	22.5 ms	$-5 \times 10^{-3}$	$+15 \times 10^{-3}$

Tabla 3.7: Sistema de Gonzalez. Rangos para las simulaciones

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (ms)		Promedio del máximo $y_{pk}$ (V)	
		media	d. típica	media	d. típica
Gonzalez (i)	186	1.835	0.025	0.935	0.029
Gonzalez (ii)	149	2.655	0.082	2.597	0.013

Tabla 3.8: Sistema de Gonzalez. Resultados en estacionario

Para conocer la sensibilidad de la órbita a los cambios de la ganancia  $K_p$ , se realizaron otras 150 simulaciones, con condiciones iniciales  $x_1(0) = 0.005$ ,  $x_2(0) = 0.05$ ,  $x_3(0) = 0.05$ , el control se aplicó en  $T_{on} = 0.15$  y se simuló hasta  $T_{off} = 0.35$ , con un periodo de muestreo  $T_m = 1 \times 10^{-5}$ , un ancho del pulso  $t_w = 1 \times 10^{-5}$ . La ganancia nominal se fijó en  $K_p = 7,5$ . Los resultados que se muestran en la tabla 3.9, señalan que, en 133 casos, la órbita promedio obtenida

<sup>4</sup>En este caso las dimensiones de  $K_p$  son  $V \cdot s \cdot V^{-2}$ .

está próxima a la del caso (i) de la tabla 3.8, mientras que en los otros 17 casos, está próxima a la del caso (ii). Ambas presentan robustez frente a los cambios de la ganancia en el rango  $6,76 < K_p < 8,25$

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (s)		Promedio del máximo $y_{pk}$ (V)		Variación de ganancia	
		media	d. típica	media	d. típica	media	d. típica
Gonzalez (i)	133	1.853	0.067	0.949	0.073	6.43	0.43
Gonzalez (ii)	17	2.662	0.032	2.555	0.020	7.73	0.23

Tabla 3.9: Sistema de Gonzalez. Resultados en estacionario con control unipolar, mostrando la sensibilidad al cambio de ganancia  $6,76 < K_p < 8,25$ .

Con el fin de simular en condiciones próximas a las de un circuito real y también para probar la variante de control bipolar, se realizaron nuevos ensayos en los que, para llevar a cabo el control por pulsos, se aprovecha el nodo formado por la entrada al amplificador, el condensador  $C_1$  y la resistencia  $R$  (véase la figura 3.24) y se tiene en cuenta la limitación de la señal de control, como se explica mas abajo.

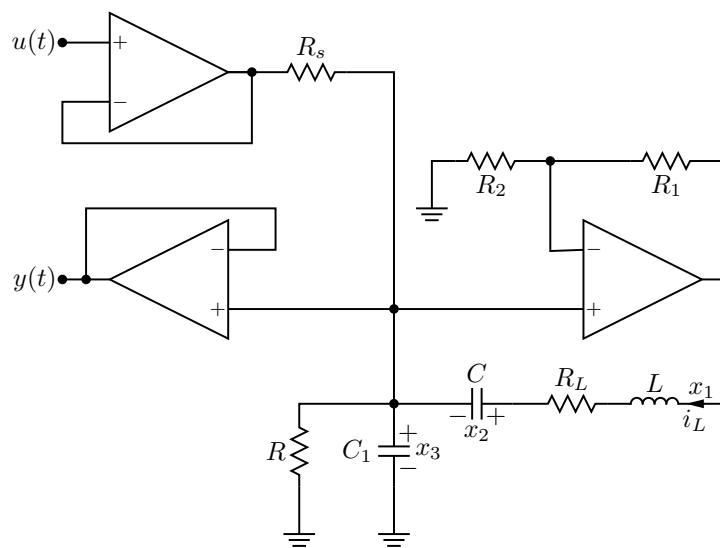


Figura 3.24: Circuito de González.



$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (1/L)(f - R_L x_1 - x_2) \\
\dot{x}_2 &= (1/C)x_1 \\
\dot{x}_3 &= (1/C_1)(x_1 - x_3/R - (x_3 - u)/R_s) \\
f &= (A/2)(|x_3 + V_S/A| - |x_3 - V_S/A|) - x_3
\end{aligned} \tag{3.7}$$

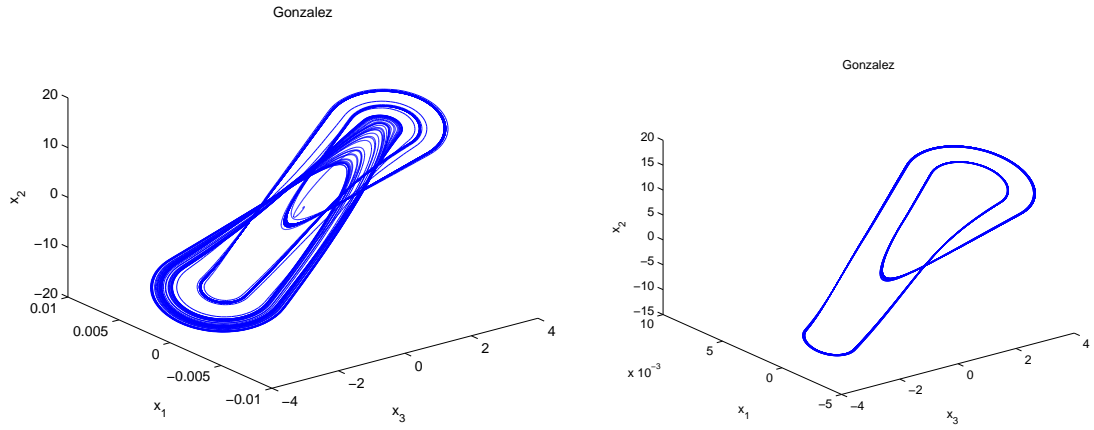


Figura 3.25: Otro tránsito y órbita estabilizada en el circuito de González ( $t > 0.2$  s.). El control limitado a 14 V. se aplicó en  $t = 0.1$  s.

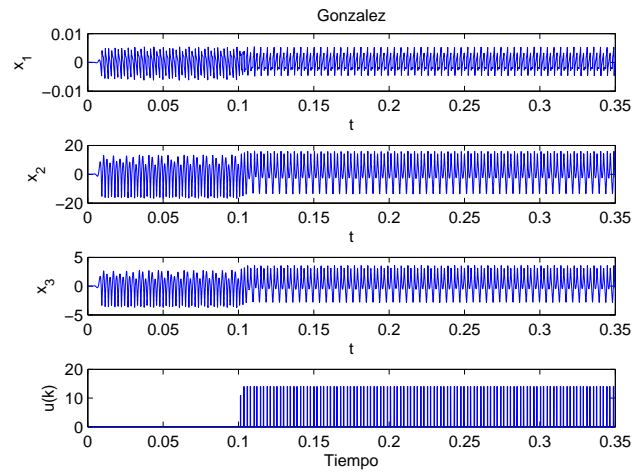


Figura 3.26: Señales en el circuito de González. Control unipolar limitado a 14V. El control se aplicó en  $t = 0.1$  s.

Este nodo define tanto la tensión de salida como la variable de estado  $x_3(t)$ . La aplicación de los pulsos de tensión se hace a través del amplificador separador y de la resistencia  $R_s = 100k\Omega$ .

Nótese que estos nuevos ensayos son diferentes a los anteriores, pues varía el punto de aplicación del control y por tanto el modelo simulado, que queda como en la ecuación 3.8. Además, se ha limitado la señal de control a 14V.

Con control unipolar, se han efectuado un total de 300 simulaciones con  $K_p = 0,24$ ,  $T_m = 10 \times 10^{-6}$ s. y  $t_w = 200 \times 10^{-6}$ s. con una tensión de saturación de +14 V. El control se aplicó en  $[t_{on}]_1 = 0,2$  s. hasta  $t_{off} = 0,6$  s. También en estos nuevos ensayos se han podido diferenciar resultados según los dos ciclos de la órbita (2-periódica) de la figura 3.25.

En 134 de estas simulaciones, el tiempo medio de vuelo es de  $\bar{T}_j = 2.413$  ms con  $\sigma_T = 0.006$  ms y pico positivo de  $\bar{y}_{pj} = 3.202$  V con  $\sigma_y = 0.004$  V. En las otras 166 simulaciones, se encontraron valores de  $\bar{T}_j = 1.872$  ms con  $\sigma_T = 0.013$  ms y  $\bar{y}_{pj} = 3.634$  V con  $\sigma_y = 0.006$  V respectivamente.

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (ms)		Promedio del máximo $y_{pk}$ (V)	
		media	d. típica	media	d. típica
Gonzalez (i)	166	1.872	0.013	3.634	0.006
Gonzalez (ii)	134	2.413	0.006	3.202	0.004

Tabla 3.10: Circuito de Gonzalez. Control unipolar. Resultados en estacionario.

Obsérvese que los valores del tiempo medio de vuelo son solo ligeramente diferentes a los mostrados en la tabla 3.8, pese a haber limitado la amplitud de los pulsos de control y aunque la órbita estabilizada ha cambiado de “*scroll*”, lo que queda señalado en la amplitud del pico. Nótese también que a pesar de su saturación, el controlador logra el objetivo.

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (ms)		Promedio del máximo $y_{pk}$ (V)	
		media	d. típica	media	d. típica
Gonzalez	300	2.212	0.08	1.910	0.024

Tabla 3.11: Circuito de Gonzalez. Control bipolar. Resultados en estacionario

Bajo control bipolar, también se han realizado 300 simulaciones, la saturación del controlador se ha estrechado aún más<sup>5</sup>, fijándola en  $\pm 10V$ , y la ganancia se ha ajustado a  $K_p = 0,4$  y  $t_w = 30 \times 10^{-6}s$ , permaneciendo todos los demás parámetros y condiciones iguales a los anteriores. Se obtiene un tiempo de vuelo de  $\bar{T}_j = 2.212$  ms con  $\sigma_T = 0.008$  ms, y un pico de  $\bar{y}_{pj} = 1.910$  con  $\sigma_y = 0.024$  V.

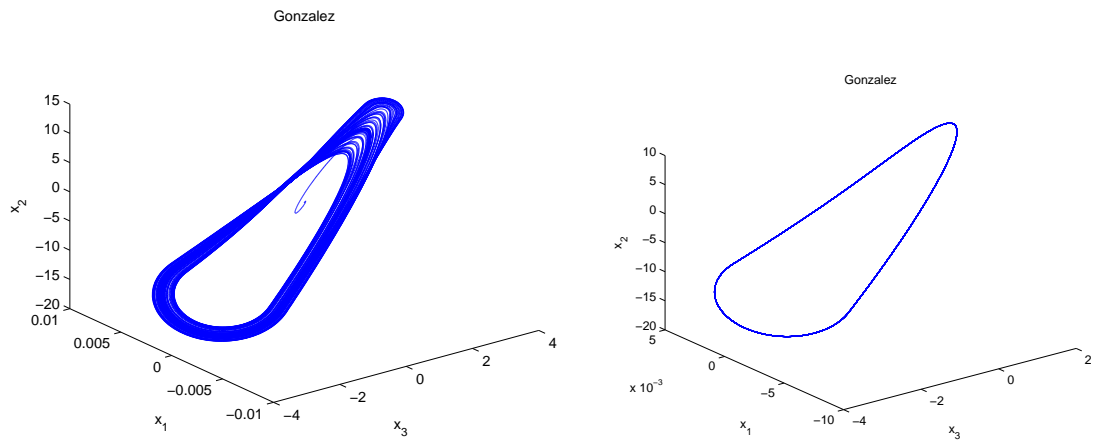


Figura 3.27: Tránsito y órbita estabilizada en el circuito de Gonzalez ( $t > 0.2$  s.). El control bipolar se aplicó en  $t = 0.1$  s.

Obsérvese que con control bipolar la órbita estabilizada tiene otra morfología, pues resulta ser 1-periódica. Nótese también, en la figura 3.28, la notable disminución del esfuerzo de control que se obtiene bajo esta variante del algoritmo de control.

<sup>5</sup>Simulando las restricciones de una tarjeta D/A bipolar con fondo de escala  $\pm 10V$ .

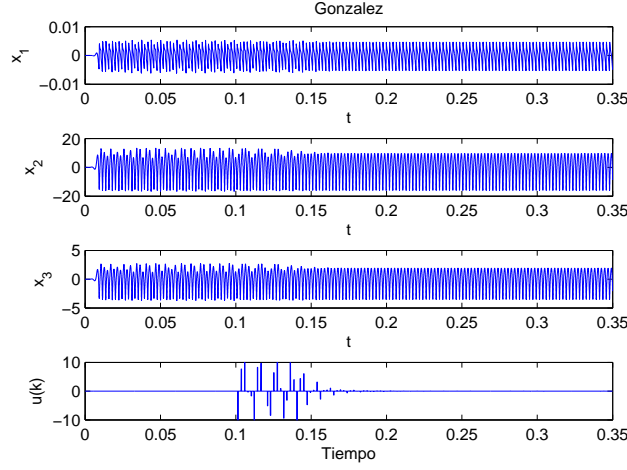


Figura 3.28: Señales en el circuito de Gonzalez. Control bipolar limitado a 10V; se aplicó en  $t = 0.1$  s.

### 3.4.3. Circuito de Chua

Para las primeras simulaciones, el sistema de Chua [Chua y Huynh (1993), Andrievskii y Fradkov (2003), González-Miranda (2004)], se ha supuesto representado por el modelo simplificado 3.8, en el que es accesible la medida de la tercera variable de estado ( $y = x_3$ ), y que puede aplicarse el control en el lado derecho de la primera ecuación de:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \alpha(x_2 - x_1 - f) \\
 \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -\beta x_2 \\
 f &= bx_1 + \frac{(a-b)}{2}(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Los valores de los parámetros son [González-Miranda (2004)]:  $a = -1.142857$ ,  $b = -0.714286$ ,  $\alpha = -6.69191$ ,  $\beta = -1.52161$  y  $\Delta t = 10^{-6}$  s.; las condiciones iniciales son  $x_1(0) = -0.7$ ,  $x_2(0) = 0.2$ ,  $x_3(0) = 0.75$ . Para el controlador se utilizan,

$T_m = 1 \text{ ms.}$ ,  $t_w = 1 \text{ ms.}$ ,  $T_d = 1 \text{ ms.}$  y  $K_p = 10000$ .

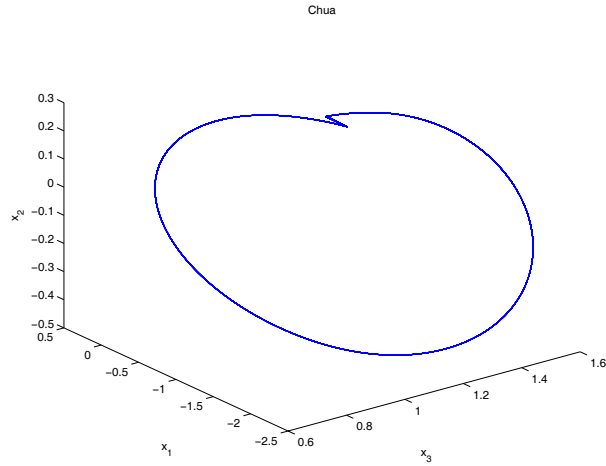


Figura 3.29: Sistema de Chua. Órbita estabilizada ( $t > 80 \text{ s}$ ). El control se aplicó en  $t = 50 \text{ s}$ .

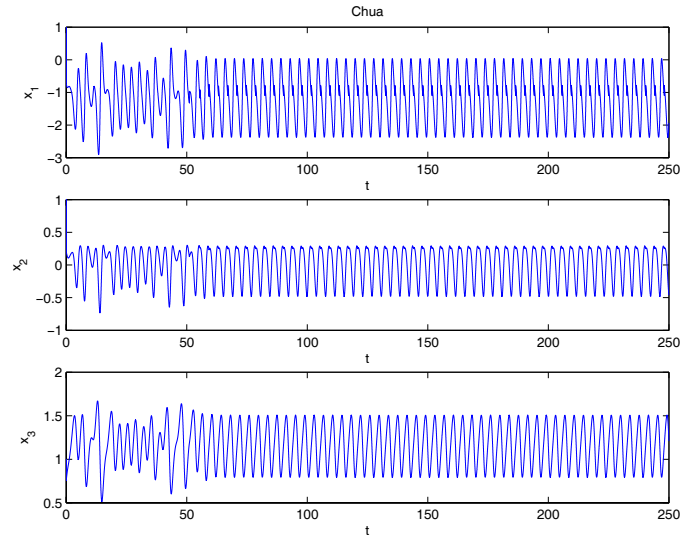


Figura 3.30: Sistema de Chua. El control se aplica en  $t = 50 \text{ s}$ .

Se ha vuelto a simular este sistema incorporando ahora un nivel de ruido del  $\pm 2\%$  con la misma  $K_p = 10000$  y con un  $t_{holdoff} = 2500 \text{ ms}$ . Los resultados, mostrados en la figura 3.31, pueden compararse con los obtenidos sin ruido que aparecen en la figura 3.29.

Se observa como el algoritmo logra la estabilización, en una órbita muy

próxima. Nótese también, como el evento variable ha cambiado de fase (situado en otro momento del tiempo).

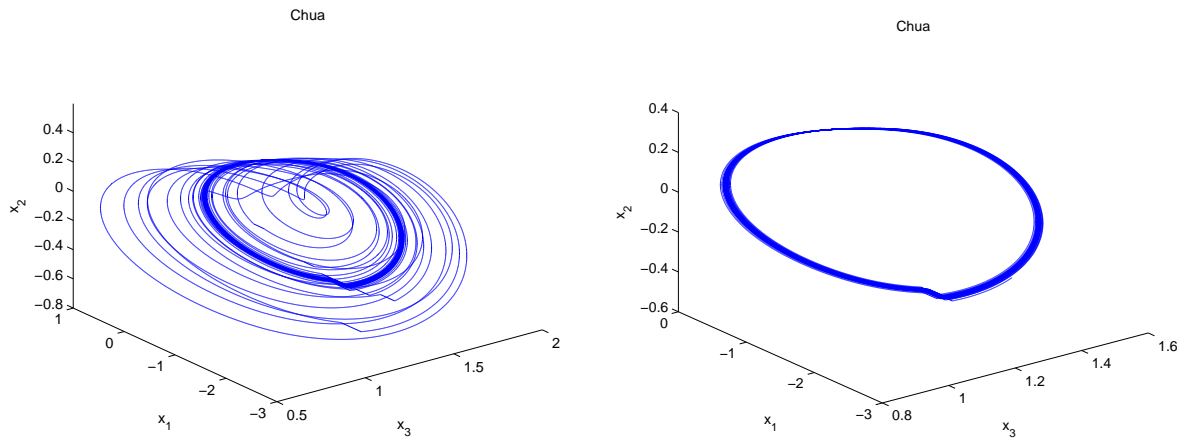


Figura 3.31: Sistema de Chua. Transición y órbita estabilizada bajo ruido del  $\pm 2\%$  y  $t_{holdoff} = 2500$  ms. ( $t > 80$ s)

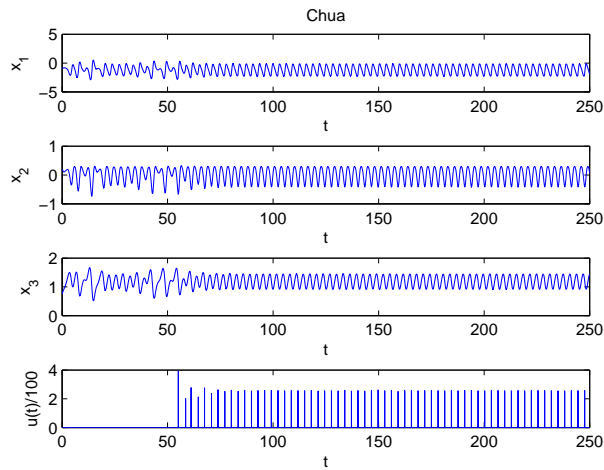


Figura 3.32: Sistema de Chua. El control unipolar sin limitar se aplicó en  $t = 50$ s.

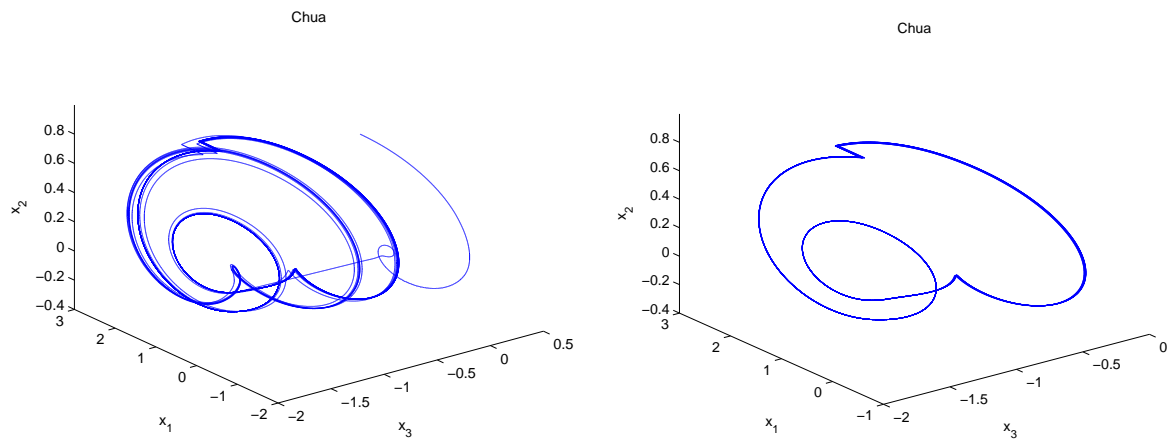
En un ensayo tipo Monte-Carlo en el que se han realizado 335 simulaciones de este modelo, con el rango que refleja la tabla 3.12, se obtuvieron los resultados mostrados en la tabla 3.13.

	Aplicación del control		C. iniciales	
Sistema	Min	Max	Min	Max
Chua	40 s	60 s	-1	+1

Tabla 3.12: Sistema de Chua. Rangos para las simulaciones

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (s)		Promedio del máximo $ypk$	
		media	d. típica	media	d. típica
Chua (a)	164	3.196	0.167	1,477	0.015
Chua (b)	169	10,234	0,033	-0,332	0,003

Tabla 3.13: Sistema de Chua. Resultados en estacionario

Figura 3.33: Sistema de Chua. Transición y otra órbita estabilizada bajo ruido del  $\pm 2\%$  y  $t_{holdoff} = 2500$  ms. ( $t > 80$ s)

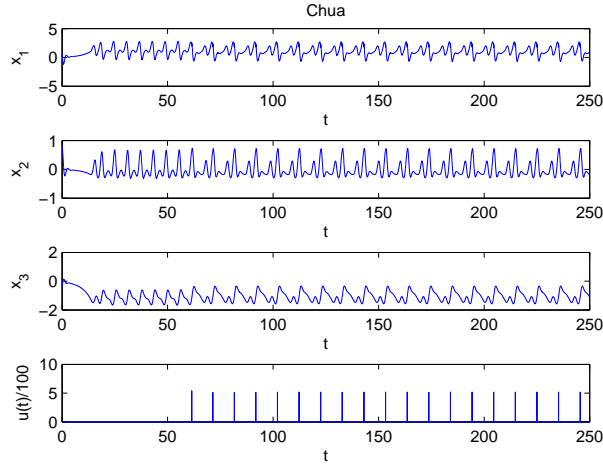


Figura 3.34: Sistema de Chua. El control unipolar no limitado se aplica en  $t = 50$  s.

Destaca la aparición en el sistema de Chua de un comportamiento diferente al mostrado en la figura 3.31 (que se denominará caso (a)). Se trata de la órbita 2-periódica que se muestra en la figura 3.33 y que se sitúa en la otra “scroll” que caracteriza al sistema de Chua. Esta situación -caso (b)-, surge al lograr el controlador el comportamiento periódico en otra de las múltiples (e inestables) condiciones de operación candidatas [Abed *et al* (1995)] inmersas en el caos del sistema.

La elección de una u otra órbita plantea un problema abierto para este tipo de control, que consiste en incluir en el controlador la opción de que el operador seleccione el comportamiento deseado. Ahora bien, la tabla 3.13 muestra que, una vez establecido un régimen, ya sea el ocurrido en el caso (a) o el que aparece en el caso (b), el comportamiento estacionario obtenido es periódico, estable y reproducible.

Con el fin de estudiar la sensibilidad de la órbita a los cambios de la ganancia  $K_p$ , se realizaron otras 150 simulaciones, con las mismas condiciones iniciales  $x_1(0) = -0.7$ ,  $x_2(0) = 0.2$ ,  $x_3(0) = 0.75$ , un nivel de ruido de  $\pm 2$  mV., el control se



aplicó en  $T_{on} = 50$  y se simuló hasta  $T_{off} = 200$ , con un periodo de muestreo  $T_m = 1 \times 10^{-3}$ , un ancho del pulso  $t_w = 1 \times 10^{-3}$  y un tiempo de inhibición  $t_{holdoff} = 2500 \times 10^{-3}$  s. La ganancia nominal se fijó en  $K_p = 10000$ . Los resultados que se muestran en la tabla 3.14, señalan que la órbita promedio obtenida está próxima a la del caso (a) de la tabla 3.13, cuya robustez frente a cambios de la ganancia queda patente.

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (s)		Promedio del máximo $ypk$		Variación de ganancia	
		media	d. típica	media	d. típica	media	d. típica
Chua	150	3.92	0.062	1.512	0.014	9970	1156

Tabla 3.14: Sistema de Chua. Resultados en estacionario con control unipolar, mostrando la sensibilidad al cambio de ganancia  $8002 < K_p < 11947$ .

Como se sabe, este complejo sistema caótico de Chua [Chua *et al* (1986), Chua y Huynh (1993), Murali y Sinha (2003), Jing *et al* (2015)], puede ser realizado por un circuito electrónico basado en amplificadores operacionales, (ver [Kennedy *et al* (1992)] para una descripción completa). El circuito se ha representado en la figura 4.29.

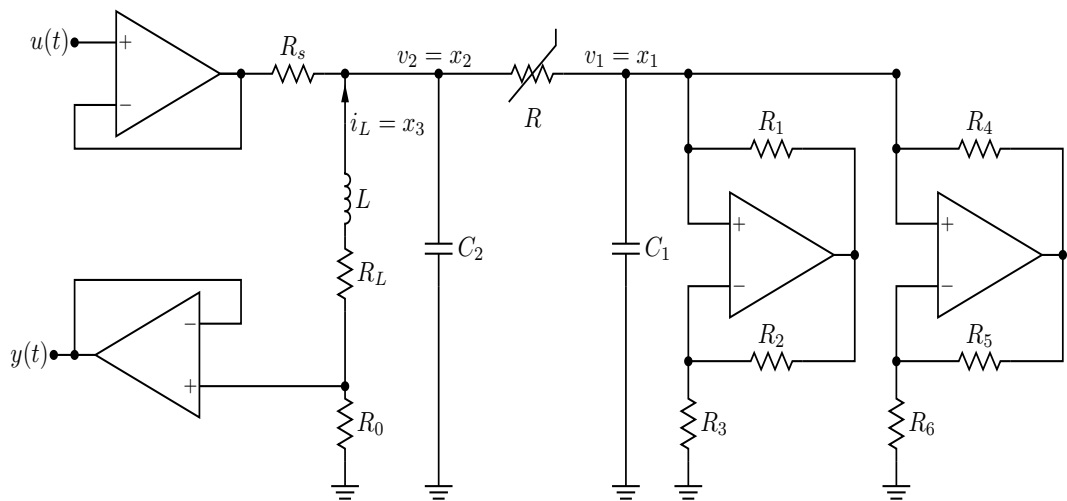


Figura 3.35: Circuito de Chua.

Al circuito básico de Kennedy [Kennedy *et al* (1992)], se le han añadido dos amplificadores separadores: el primero, para observar la salida  $y = R_0 i_L$  (a través de la resistencia de medida  $R_0 = 10\Omega$ ); el segundo, para aplicar el control  $u_2(t)$  sobre  $v_2$  (via  $R_S = 100k\Omega$ ). Su modelo matemático (4.3) es ahora:

$$\begin{aligned} g &= m_0 x_1 + 1/2(m_1 - m_0)(|(x_1 + B_p)| - |(x_1 - B_p)|) \\ \dot{x}_1 &= (1/C_1)[(x_2 - x_1)/R - g] \\ \dot{x}_2 &= (1/C_2)[(x_1 - x_2)/R + x_3 - (x_2 - u_2)/R_S] \\ \dot{x}_3 &= (1/L)[-x_2 - (R_L + R_0)x_3] \end{aligned} \quad (3.9)$$

con los siguientes parámetros [Kennedy *et al* (1992)]:  $m_{01} = 1/R_1$ ,  $B_{p1} = (R_3/(R_2 + R_3))E_{sat}$ ,  $m_{11} = -1/R_3$ ,  $m_{02} = 1/R_4$ ,  $B_{p2} = (R_6/(R_5 + R_6))E_{sat}$ ,  $m_{12} = -1/R_6$ ,  $m_0 = (m_{01} + m_{02})$ ,  $m_1 = (m_{11} + m_{12})$ ,  $B_p = B_{p2}$ , y con los siguientes valores de los componentes:  $L = 0,018H$ ,  $C_1 = 10nF$ ,  $C_2 = 100nF$ ,  $R_1 = 220\Omega$ ,  $R_2 = 220\Omega$ ,  $R_3 = 2200\Omega$ ,  $R_4 = 22000\Omega$ ,  $R_5 = 22000\Omega$ ,  $R_6 = 3300\Omega$ ,  $E_{sat} = 13.9$  V (supuesto  $V_{cc} \pm 15$  V) y  $R_L = 13.5\Omega$ , la resistencia de la bobina. El valor de  $R = 1710\Omega$ , difiere del señalado en [Kennedy *et al* (1992)] ( $R = 1790\Omega$ ) pues la presencia de  $R_0$  y  $R_S$  requiere reajustar  $R$  para obtener caos.

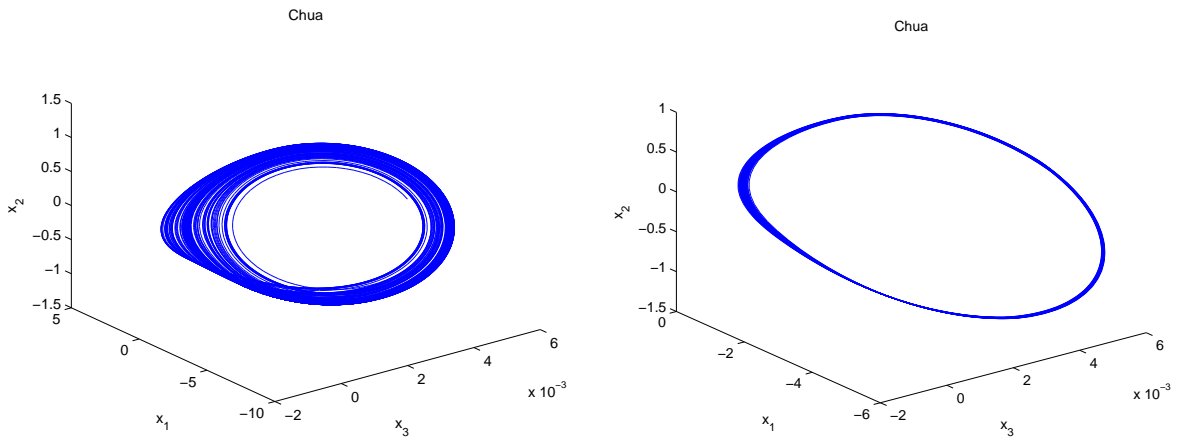


Figura 3.36: Circuito de Chua. Transición a la órbita estabilizada. Órbita tras  $t > 80$  ms. El control se aplicó en  $t = 30$  ms.

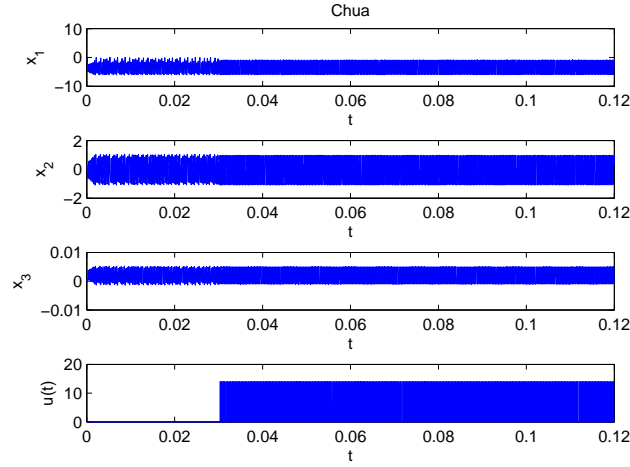


Figura 3.37: Circuito de Chua. Señales bajo control unipolar. El control se limita a 14V, y se aplicó en  $t = 30$  ms.

Sobre este otro modelo, ahora con una dinámica mucho mas rápida, se han llevado a cabo otras 300 simulaciones, realizadas bajo control unipolar con  $\Delta t = 0,8 \times 10^{-10}$  s, condiciones iniciales  $[x_1(0)]_1 = -0.7$ ,  $[x_2(0)]_1 = 0.2$ ,  $[x_3(0)]_1 = 0,001$  y un ruido de medida de  $\pm 1$  mV. Nótese que este nivel de ruido resulta de considerar condiciones de peor caso, pues con un amplificador de instrumentación se aumentaría la relación señal ruido que llegaría al controlador.

En el controlador, se han considerado los siguientes valores de los parámetros:  $T_m = 5\mu s$ ,  $t_{holdoff} = 200\mu s$ , ajustándose la ganancia  $K_p$ <sup>6</sup> y el ancho del pulso  $t_w$  según la forma de control (unipolar o bipolar) empleada.

Para el algoritmo de control unipolar, se ha ajustado la ganancia del controlador a  $K_p = 120$  y el ancho del pulso a  $t_w = 100\mu s$ . La tensión de saturación de los amplificadores es de +14 V. El control se aplica aleatoriamente desde  $[t_{on}]_1 = 30$  ms hasta  $t_{off} = 120$  ms.

Bajo esta forma de control unipolar, se encontró que en 158 de ellas se tiene un comportamiento en una de las dos “scrolls” [Chua *et al* (1986)], obteniéndose que el tiempo medio de vuelo es de  $\bar{T}_j = 0.34$  ms con desviación típica  $\sigma_T = 0.01$

<sup>6</sup>En  $V \cdot s \cdot V^{-2}$ , para todos los casos simulados.

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (ms)		Promedio del máximo $y_{pk}$ (V)	
		media	d. típica	media	d. típica
Chua (i)	158	0.34	0.01	0.051	0.001
Chua (ii)	142	0.34	0.01	0.010	0.001

Tabla 3.15: Circuito de Chua. Control unipolar. Resultados en estacionario.

ms y un promedio del valor del pico positivo  $\bar{y}_{pj} = 0.051$  V, con desviación típica  $\sigma_y = 0.001$  V. En las otras 142 simulaciones, correspondientes a la otra de las “scrolls”, el tiempo medio de vuelo es el mismo, con un promedio del valor del pico positivo de  $\bar{y}_{pj} = 0.010$  V y con  $\sigma_y = 0.001$  V.

Cuando se elige la forma de control bipolar, las figuras 3.38 y 3.39 muestran las respectivas órbitas obtenidas sin ruido y con un ruido de medida de  $\pm 0.1$  mV. En el primer caso, los pulsos tienden a disminuir y la órbita lograda no muestra una banda de dispersión muy significativa. Con bajo nivel de ruido, el controlador genera pequeños pulsos que mantienen confinada la órbita alrededor de una banda que podría considerarse de utilidad.

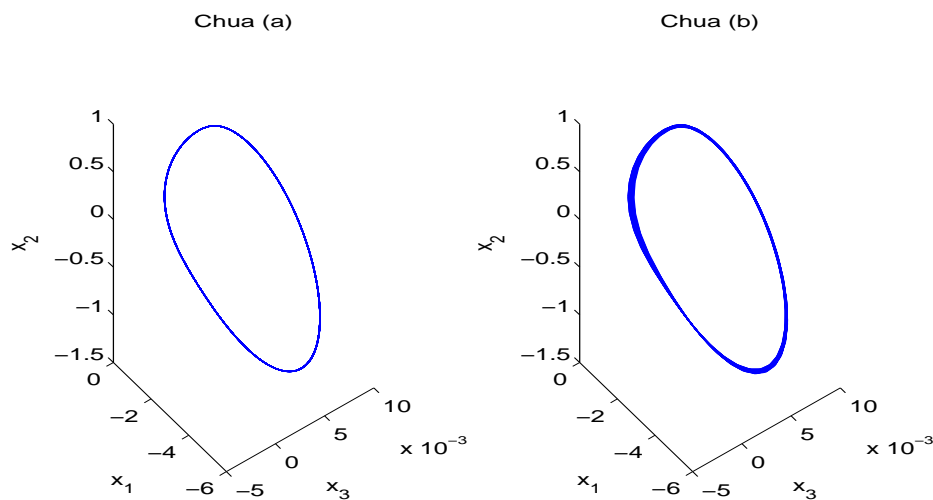


Figura 3.38: Circuito de Chua. Control bipolar. (a) sin ruido (b) ruido 0.1mV.

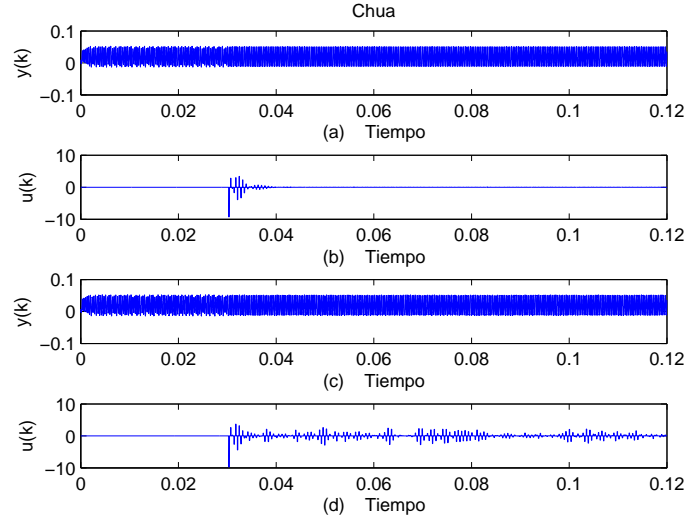


Figura 3.39: Circuito de Chua. Control bipolar. (a),(b) sin ruido; (c),(d) ruido 0.1mV.

Al realizar 600 simulaciones con el modo bipolar, se han reajustado la ganancia a  $K_p = 125000$ , el ancho del pulso a  $t_w = 100\mu s$  y la saturación de la salida a  $\pm 14V$ . En estas simulaciones se obtiene un comportamiento como el de las figuras 3.38 y 3.39, con tiempo de vuelo de  $\bar{T}_j = 0.35$  ms y  $\sigma_T = 0.01$  ms. El valor del pico positivo es  $\bar{y}_{pj} = 0.051$  V, con  $\sigma_y = 0.01$  V. Estas nuevas simulaciones se han realizado con  $\Delta t = 0.8 \times 10^{-10}$  s y con un muestreo más fino  $T_m = 1\mu s$ .

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (ms)		Promedio del máximo $y_{pk}$ (V)	
		media	d. típica	media	d. típica
Chua	600	0.35	0.01	0.051	0.001

Tabla 3.16: Circuito de Chua. Control bipolar. Resultados en estacionario.

Parece que puede concluirse que el método de control por pulsos propuesto es robusto, en el sentido de que con bajo nivel de ruido, la técnica empleada

logra mantener estabilizada la órbita, y ello, pese a las variaciones en la condición inicial, el instante de activación del control, el ruido de medida y, sobre todo, la tendencia del complejo sistema de Chua (“*double scroll*”) [Chua *et al* (1986)] a escapar de una a otra. Cuando aumenta el ruido, son mayores las bandas de amplitud y fase y el control puede necesitar el reajuste de parámetros.

### 3.4.4. Circuito KSS

Kiers, Schmidt y Sprott (KSS) [Kiers *et al* (2004)], presentaron el circuito de la figura 3.40, en el que se puede obtener un comportamiento caótico.

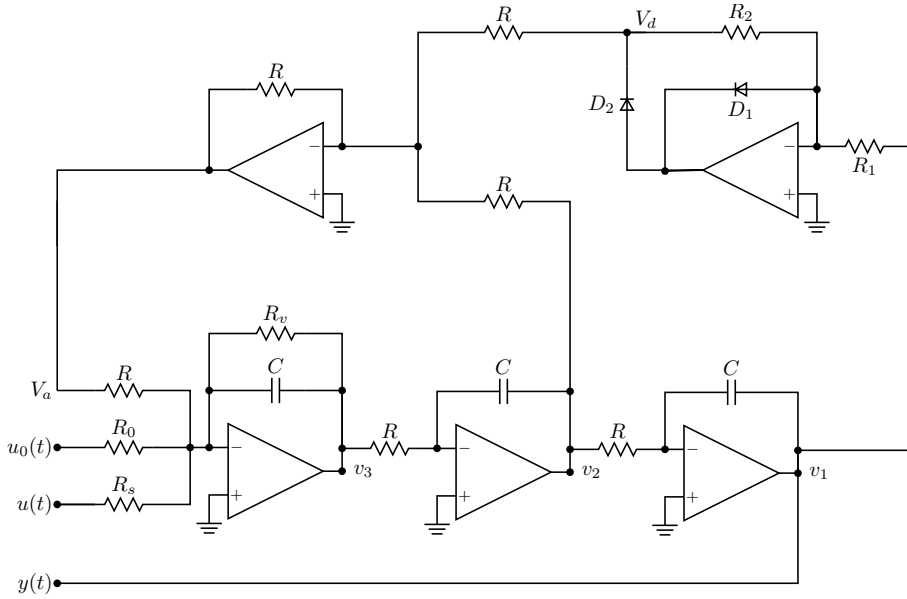


Figura 3.40: Circuito KSS.

Para simular el control propuesto en este circuito, se elige  $y = v_1$  como salida. Cuando  $u(t) = 0$ , se tiene:

$$(RC)^3 \frac{d^3 v_1}{dt^3} = -\frac{R}{R_v} (RC)^2 \frac{d^2 v_1}{dt^2} - RC \frac{dv_1}{dt} + D(v_1) - \frac{R}{R_0} u_0$$

Si se usa un escalado de tiempo  $T = \frac{t}{\alpha}$  con factor de escala  $\alpha = RC$ , entonces pueden definirse como variables de estado:

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{dv_1}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{RC} \frac{dv_1}{dT} = x_2 \\ \frac{d^2v_1}{dt^2} &= \frac{1}{(RC)^2} \frac{d^2v_1}{dT^2} = x_3 \\ \frac{d^3v_1}{dt^3} &= \frac{1}{(RC)^3} \frac{d^3v_1}{dT^3} = \dot{x}_3 \end{aligned}$$

quedando, al añadir  $u(t)$  al nodo de entrada:

$$\begin{aligned} D(x_1) &= -c(\text{mín}\{x_1, 0\}) \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -ax_3 - x_2 + D(x_1) - b(u_0 + u) \end{aligned} \tag{3.10}$$

con  $a = R/R_v$ ,  $b = R/R_0$ ,  $c = R_2/R_1$  y, en este caso, con la forma no lineal  $D(x_1) - c(\text{mín}\{x_1, 0\})$ .

En la simulación de (4.1), se ha considerado que  $u_0 = 1\text{V}$ ,  $R = 46.6$ ,  $R_v = 80$ ,  $R_0 = R_s = 156.9$ ,  $R_2 = 88.9$ ,  $R_1 = 15.1$ ; todos en  $\text{k}\Omega$ .

La escala de tiempos usa un factor  $\alpha = 15 \times 10^{-3}$ , que está próximo al valor de  $RC$  para  $C = 330 \text{ nF}$ . El paso de integración es  $\Delta T = 10^{-5}$  en unidades de tiempo escaladas; las condiciones iniciales  $[x_1(0)]_1 = 0.50$ ,  $[x_2(0)]_1 = 0.25$ ,  $[x_3(0)]_1 = 0.001$  y el nivel de ruido se estableció entre  $\pm 2 \text{ mV}$ .

En el controlador, el tiempo de muestreo  $T_m = 0.5 \times 10^{-3}$ , el ancho del pulso  $t_w = 18 \times 10^{-3}$ , y el tiempo de inhibición  $t_{holdoff} = 50 \times 10^{-3}$  s. El control se aplicó en  $[T_{on}]_1 = 200$  ( $t=3s$ )<sup>7</sup> hasta  $[T_{off}]_n = 1200$  ( $t=18s$ ).

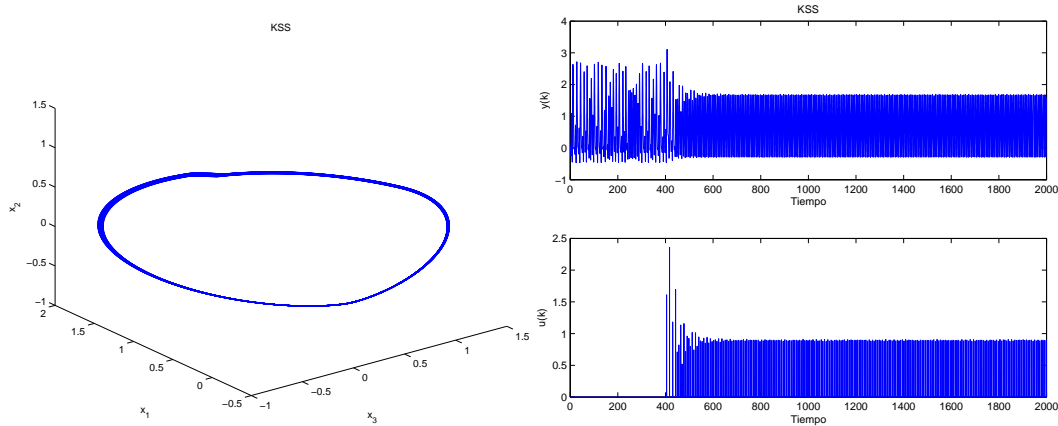


Figura 3.41: Sistema KSS bajo control unipolar ( $T > 1000$  ( $t > 15s$ )).

Sistema	Aplicación del control		C. iniciales	
	Min	Max	Min	Max
KSS	200	1200	-0.50	+0.50
	(3 s)	(18 s)		

Tabla 3.17: Sistema KSS. Rangos para las simulaciones.

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (s)		Promedio del máximo $ypk$	
		media	d. típica	media	d. típica
KSS	150	6.871	0.022	1.664	0.008
		(0.103 s)	(0.0003 s)		

Tabla 3.18: Sistema KSS. Resultados en estacionario con control unipolar.

Para estudiar el control unipolar, se realizaron 150 simulaciones, con  $K_p = 53$ , encontrando un tiempo de vuelo de  $\bar{T}_j = 6.871$  (0.103s) con  $\sigma_T = 0.022$  (0.0003s), y un valor del pico positivo de  $\bar{y}_{pj} = 1.664$  con  $\sigma_y = 0.008V$ .

<sup>7</sup>Entre paréntesis se señala el valor en segundos reales, es decir, no escalados.



Bajo control bipolar, también con  $K_p = 53$ ,  $t_w = 18\text{ms}$  y con iguales valores en los demás parámetros, el tiempo de vuelo es de  $\bar{T}_j = 6.587$  (0.099s) con  $\sigma_T = 0.016$  (0.0002s); el valor del pico positivo es de  $\bar{y}_{pj} = 1.795$  con  $\sigma_y = 0.002\text{V}$ . Obsérvese la mayor suavidad de la trayectoria por ser menor el cambio forzado por el control.

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (s)		Promedio del máximo $y_{pk}$	
		media	d. típica	media	d. típica
KSS	150	6.587 (0.099 s)	0.016 (0.0002 s)	1.795	0.002

Tabla 3.19: Sistema KSS. Resultados en estacionario con control bipolar.

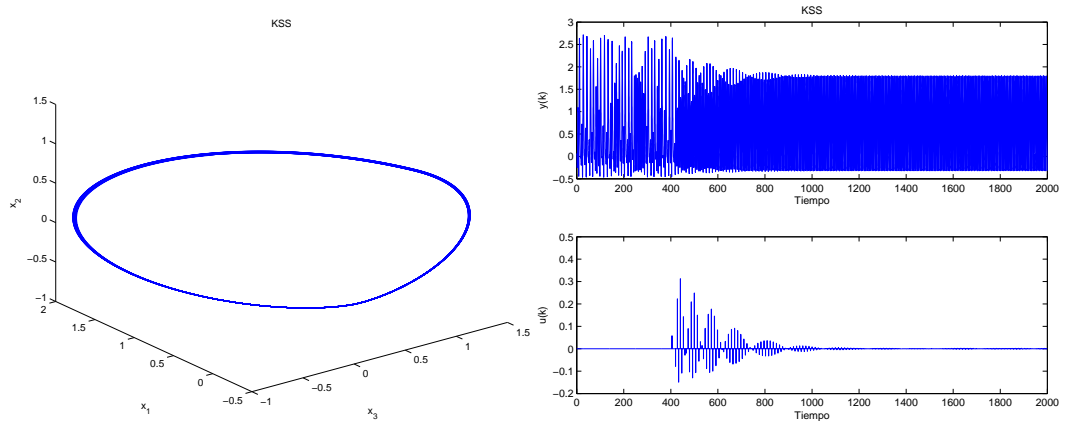


Figura 3.42: KSS bajo control bipolar ( $T > 1000$  ( $t > 15\text{s}$ )).

Para estudiar la sensibilidad de la órbita a los cambios de la ganancia  $K_p$ , se realizaron otras 150 simulaciones, con condiciones iniciales  $[x_1(0)]_1 = 0.50$ ,  $[x_2(0)]_1 = 0.25$ ,  $[x_3(0)]_1 = 0.001$ , un nivel de ruido de  $\pm 2\text{ mV}$ , el control se aplicó en  $[T_{on}]_1 = 200$  ( $t=3\text{s}$ ) hasta  $[T_{off}]_n = 1200$  ( $t=18\text{s}$ ), un periodo de muestreo  $T_m = 0.5 \times 10^{-3}$ , ancho del pulso  $t_w = 18 \times 10^{-3}$ , y tiempo de inhibición  $t_{holdoff} = 50 \times 10^{-3}\text{ s}$ . La ganancia nominal se fijó en  $K_p = 53$ . Los resultados que se muestran en la tabla 3.20, señalan la sensibilidad de la órbita frente a cambios

moderados de la ganancia.

Sistema	Número de simulaciones	Tiempo medio de retorno (s)		Promedio del máximo $ypk$		Variación de ganancia	
		media	d. típica	media	d. típica	media	d. típica
KSS	150	6.872 (0.103 s)	0.024 (0.0003 s)	1.664	0.010	52.93	2.01

Tabla 3.20: Sistema KSS. Resultados en estacionario con control unipolar, mostrando la sensibilidad al cambio de ganancia  $50,41 < K_p < 55,64$ .

### 3.5. Sistemas forzados: Duffing y Van der Pol

Con el propósito de mostrar aplicaciones prácticas del control de sistemas caóticos, mas allá de los osciladores electrónicos, se ha simulado el comportamiento del algoritmo de control presentado sobre dos modelos de sistemas forzados que pueden representar el proceso de corte en una máquina herramienta en rotación.

Las fuentes que originan los efectos no lineales observados en los procesos de corte son muy variadas, como pueden ser las debidas a la pérdida del contacto entre la pieza y la herramienta, las propiedades de los materiales en contacto, la fricción entre herramienta y viruta, etc. La no linealidad de la fuerza de corte fue experimentalmente documentada ya en 1907 por F. W. Taylor (ver [Shaw *et al* (2008)] y sus referencias), quién también reconoció el estado dinámico indeseable que denominó *chatter*.

Esta situación, que origina fuertes oscilaciones, puede no ser inestable en el sentido de la dinámica pero es perjudicial para el proceso de mecanizado. Puede ser caracterizada por el desplazamiento relativo del conjunto pieza-herramienta y por las oscilaciones observadas, cuyas amplitudes y frecuencias son diferentes de las presentes en las fuentes de excitación (frecuencia angular de giro del tambor

y frecuencia natural del sistema dinámico del conjunto pieza-herramienta). Un número considerable de trabajos experimentales, analíticos y numéricos ha tratado de comprender y predecir el chatter y otros fenómenos no lineales que aparecen en los procesos de corte (torneado y fresado).

Actualmente está ampliamente reconocido que estas oscilaciones pueden ser causadas por fenómenos regenerativos y retardos de tiempo, así como por otros mecanismos como la fricción, el acoplo entre diferentes modos de vibración y la pérdida de contacto [Shaw *et al* (2008), Quintana y Ciurana (2011), Hanna y Tobias (1974), Stépán (2001), Stépán *et al* (2004), Stépán *et al* (2005)], lo que puede llevar a que las oscilaciones resulten tener naturaleza caótica [Shaw *et al* (2008), Grabec (1988), Litak (2001), Stépán (2001)].

Por otra parte, se ha demostrado la eficacia del control activo basado en un algoritmo de control y un accionador piezoeléctrico para la reducción de las oscilaciones resultantes en los procesos de corte [Radecki *et al* (2009)]. Se mide la vibración no deseada y se controla la vibración resultante con los adecuados sensores y actuadores que responden a frecuencias altas y aplican fuerzas suficientes mediante control por señales eléctricas.

El algoritmo de control propuesto en esta tesis, cambia a un comportamiento periódico las oscilaciones caóticas, mediante la medida de las desviaciones de la profundidad de corte respecto a la nominal y la aplicación de pulsos de control en el actuador, únicamente con fines de análisis de la técnica, dejando el problema de su realización práctica para futuros trabajos.

En su forma más simplificada, es habitual modelar la dinámica de la herramienta de corte como un sistema con un grado de libertad (*1-degree-of-freedom*, 1-DOF), ver la figura (3.43), cuyos parámetros (masa  $m$ , efecto elástico  $k$  y efecto de fricción viscosa  $b$ ), generan las fuerzas que se oponen a la componente ortogonal de la fuerza de corte cuando la pieza se desplaza bajo la herramienta. Tanto el término debido a la fuerza elástica, como el de fuerza de fricción viscosa, pueden

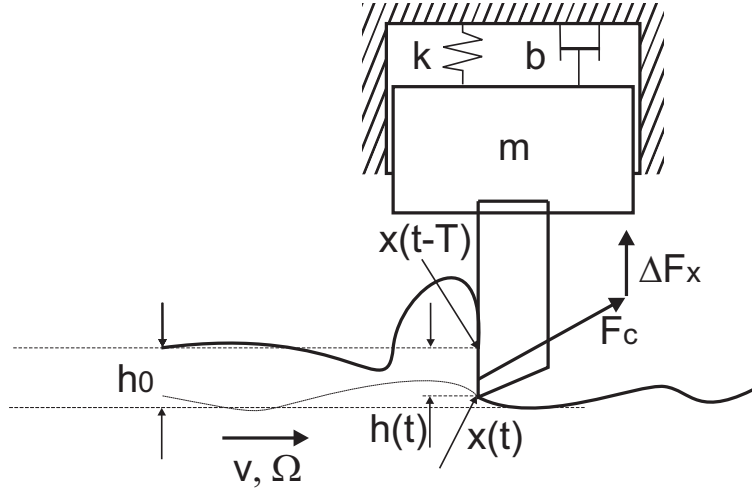


Figura 3.43: Esquema de proceso de corte continuo. (Adaptado de [Stépán *et al* (2004), Stépán *et al* (2005)])

aproximarse como funciones lineales o no lineales. Se estudia el hecho experimental que ocurre cuando las fuerzas implicadas en el proceso de corte causan un movimiento relativo entre la herramienta y la pieza, con oscilaciones caóticas en la dirección de procesado, que es perpendicular a la dirección de la velocidad de corte.

Para la fuerza dinámica de corte, habitualmente se utiliza una función de la forma [Shaw *et al* (2008), Quintana y Ciurana (2011), Hanna y Tobias (1974), Stépán (2001), Stépán *et al* (2004), Stépán *et al* (2005)]:

$$F_x = Kw(h(t))^{3/4} = Kw(h_0 + x(t - T) - x(t))^{3/4}$$

donde  $K$  es una constante,  $w$  es el ancho de la herramienta,

$$h(t) = h_0 + x(t - T) - x(t)$$

es el espesor dinámico, que puede expresarse en función del espesor de corte nominal  $h_0$  y de la diferencia entre los desplazamientos de la herramienta en ins-

tantes de tiempo separados por  $T$ , que es el tiempo de retardo entre una pasada y la siguiente ( $T = 2\pi/\Omega$ ), siendo  $\Omega$  la velocidad angular de giro de la pieza en rad/s.

Si se aproxima la fuerza de corte mediante un desarrollo en serie de Taylor de tercer orden con respecto a la variación del espesor de la viruta, se llega al modelo matemático propuesto por Hanna y Tobias [Hanna y Tobias (1974)] que consiste en la siguiente ecuación diferencial no lineal de segundo orden con retardo (DDOE, *Delayed Differential Ordinary Equation*):

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) + b_1x^2(t) + b_2x^3(t) = K_1 \sum_{n=1}^3 \alpha_n [x(t) - x(t-T)]^n$$

donde  $\xi$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $\omega_n$  es la frecuencia natural de la oscilación libre de la herramienta; el término derecho de la ecuación corresponde a una aproximación del efecto de la componente de la fuerza de corte,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $K_1$ , y  $a_i$  son parámetros experimentales.

Este modelo matemático se puede utilizar para analizar el comportamiento no lineal observado en máquinas herramientas, como la aparición de diferentes tipos de atractores, bifurcaciones y comportamiento caótico.

Suponiendo que  $x(t-T)$  se aproxima como [Stépán *et al* (2004), Stépán *et al* (2005), Litak (2001), Wang *et al* (2006)]

$$x(t-T) = a \cos(\Omega t + \xi)$$

y que se escala convenientemente tanto en amplitud como en tiempo entonces la dinámica de  $x(t)$  queda descrita por una nueva variable, que denotamos por  $\chi(t)$  y, en la que por simplificar la notación,  $t$  representa ahora la escala de tiempo adimensional. Esta nueva variable  $\chi(t)$  representa la desviación relativa respecto

del espesor de corte nominal  $h_0$ , es decir,

$$\chi(t) = \gamma(h(t) - h_0)/h_0$$

siendo  $\gamma$  el factor de escala.

Si se anulan algunos coeficientes y se agrupan términos, la dinámica de  $\chi(t)$  queda expresada por la ecuación de Duffing que, para ciertos valores de los parámetros, puede presentar un comportamiento caótico que se aproxima al de las oscilaciones observadas [Stépán *et al* (2004), Stépán *et al* (2005), Litak (2001), Wang *et al* (2006)]:

$$\ddot{\chi}(t) + [a_0 + a_1\chi^2(t)]\dot{\chi}(t) + b\chi(t) + c\chi^3(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

En caso que el término de fricción viscosa sea no lineal y se describa por el cuadrado del desplazamiento, se obtiene el conocido modelo matemático de Duffing-van der Pol [González-Miranda (2004)]:

$$\ddot{\chi}(t) + a\dot{\chi}(t) + b\chi(t) + c\chi^3(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Ambos modelos se suelen utilizar para el estudio la dinámica no lineal de las vibraciones mecánicas, y en particular, para el análisis de la aparición de comportamiento caótico para determinados valores de los parámetros.

### 3.5.1. Modelo de Duffing

Como se señaló anteriormente, la ecuación de Duffing escalada en amplitud y tiempo:

$$\ddot{\chi}(t) + a\dot{\chi}(t) + b\chi(t) + c\chi^3(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

puede usarse para describir ciertas situaciones en los procesos de corte continuo en las que aparece caos.

Si se considera que la dinámica en el espacio de estados puede quedar descrita por el vector de estado  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ , donde

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \chi(t) \\ x_2(t) &= \frac{d\chi(t)}{dt} \end{aligned}$$

queda el sistema de ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - bx_1 - cx_1^3 + A \sin \omega x_3 \\ \dot{x}_3 &= 1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde los pulsos de control se han introducido aditivamente en el lado derecho de la primera ecuación, lo que modificará la velocidad de la variable de estado  $x_1(t)$ .

La simulación se ha realizado en situación de caos, considerando medible  $x_2(t) = d\xi(t)/dt$ , con los siguientes valores de los parámetros (ver [González-Miranda (2004)], pp 13-15):  $a=0.1$ ,  $b=-0.5$ ,  $c=0.5$ ,  $A=0.24$ ,  $\omega=1$ ,  $\phi = -\pi/2$ , condición inicial  $x_1(0)=0.5$ ;  $x_2(0)=0.25$ ;  $x_3(0)=0$  y un paso de integración de  $\Delta(t) = 1 \times 10^{-5}$ . En el controlador se usa un periodo de muestro  $T_m = 1 \times 10^{-3}$  (unidades de tiempo escalado), un ancho de pulso  $t_w = 200 \times 10^{-3}$  y se inhibe el

control durante  $t_{holdoff} = 2000 \times 10^{-3}$ . Con una ganancia  $K_p = 4000$ , se obtienen los resultados mostrados en las figuras 3.44 y 3.45

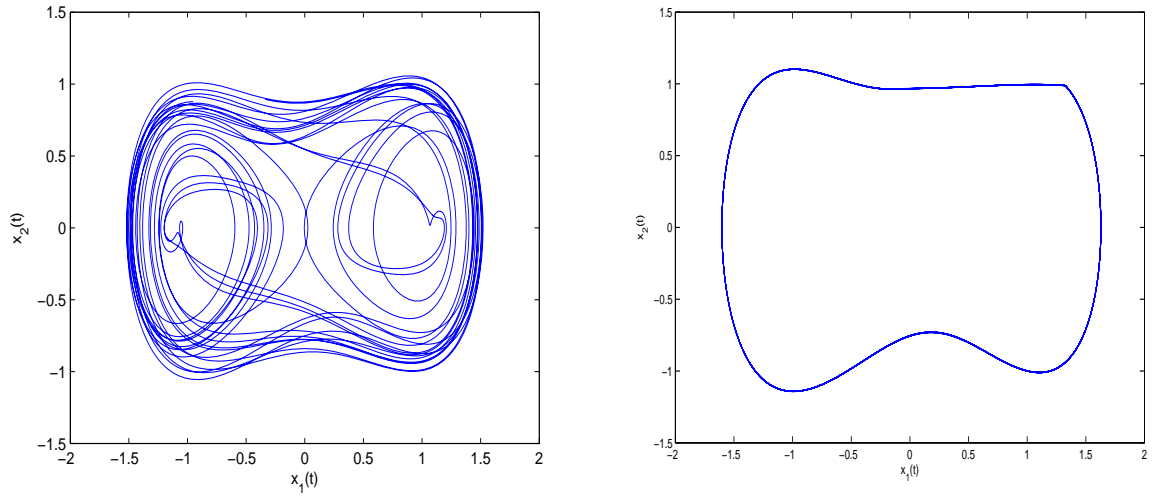


Figura 3.44: Sistema de Duffing: *izda.* sin control, *dcha.* Bajo control

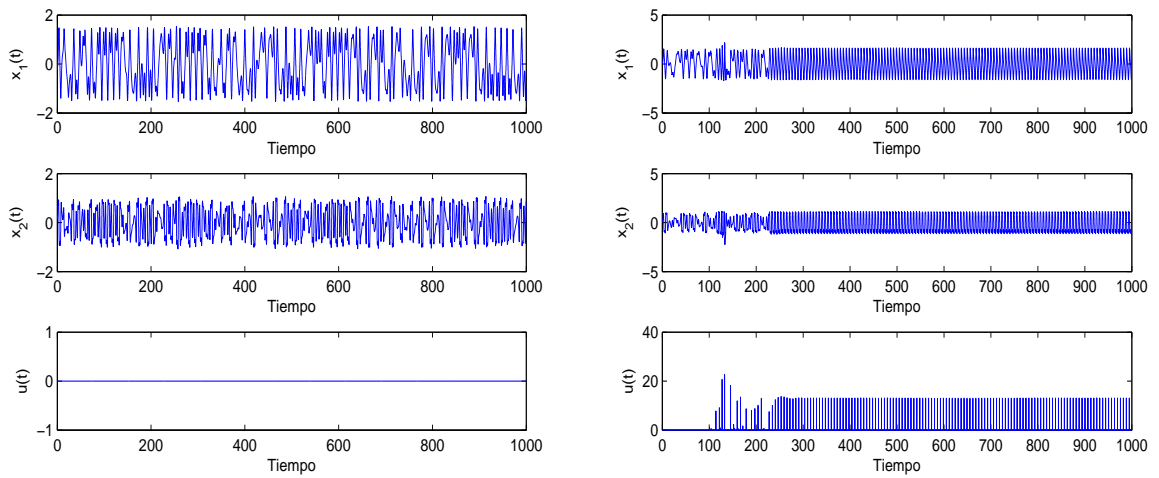


Figura 3.45: Señales en el sistema de Duffing: *izda.* sin control, *dcha.* Bajo control



### 3.5.2. Modelo de Van der Pol-Duffing

El modelo de van der Pol-Duffing (ver 3.5) escalado en tiempo y amplitud, es:

$$\ddot{\chi}(t) + [a_0 + a_1\chi^2(t)]\dot{\chi}(t) + b\chi(t) + c\chi^3(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Si se considera que la dinámica en el espacio de estados viene descrita por el vector de estado  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ , donde  $x_1(t) = \chi(t)$  y  $x_2(t) = d\chi(t)/dt$ , queda siguiente sistema de ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + c(1 - x_1^2)x_2 + A \sin \omega x_3 \\ \dot{x}_3 &= 1\end{aligned}\tag{3.12}$$

donde los pulsos de control se aplican en el lado derecho de la primera ecuación modificando la velocidad de cambio de la variable de estado  $x_1(t)$ .

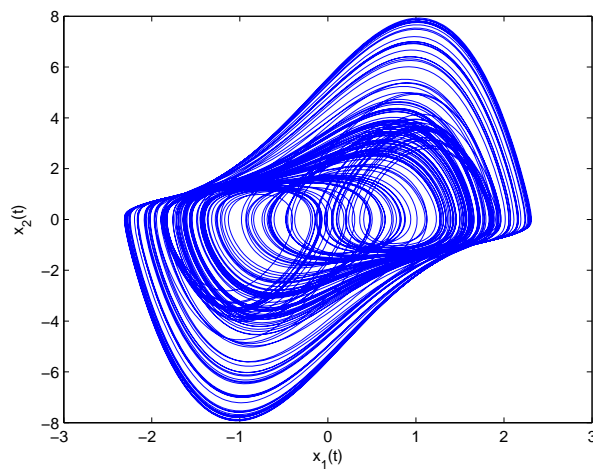


Figura 3.46: Sistema de VanderPol-Duffing sin control.

La simulación se ha realizado midiendo  $x_2(t) = d\chi(t)/dt$  y con los siguientes valores de los parámetros [18]:  $b = 1$ ,  $c = -a_0 = a_1 = 3$ ,  $A=5$ ,  $\omega=1.778$ ,  $\phi=-\pi/2$ , condición inicial  $x_1(0) = 0,05$ ;  $x_2(0) = 0,025$ ;  $x_3(0) = 0$  y un paso de integración de  $\Delta(t) = 1 \times 10^{-5}$ . En el controlador,  $Kp = 0,283 \times 10^{-3}$ ,  $T_m = 1 \times 10^{-3}$  (unidades de tiempo escalado),  $t_w = 6001 \times 10^{-3}$  y  $t_{holdoff} = 10001 \times 10^{-3}$ .

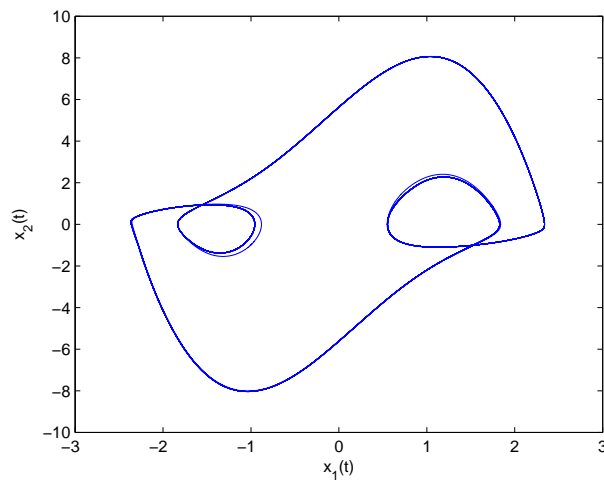


Figura 3.47: Sistema de VanderPol-Duffing bajo control.

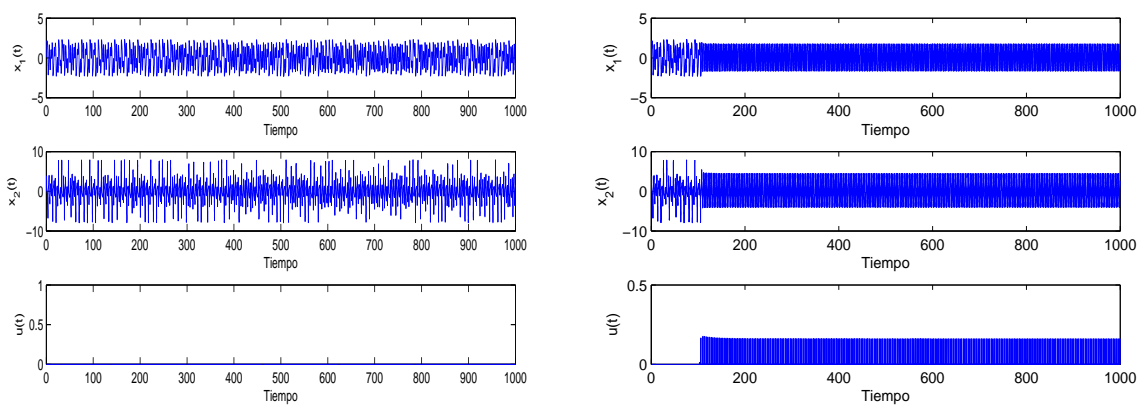


Figura 3.48: Sistema de VanderPol-Duffing: izda. sin control, dcha. Bajo control

## **Capítulo 4**

### **Realización y resultados experimentales**



## 4.1. Introducción

A diferencia de la simulación numérica, un ensayo sobre sistemas reales será lo que calificará definitivamente las prestaciones del método de control por pulsos que se propone. Las tolerancias en los valores nominales de los componentes, los efectos térmicos, el ruido real en la medida, la discretización y la imposición del un fondo de escala para las magnitudes en los convertidores A/D y D/A empleados, las limitaciones del ancho del pulso y del periodo de muestreo, etc., pondrán a prueba al algoritmo de control y a su utilidad práctica. Su validación, no ya sobre modelos matemáticos, sino a través de los resultados obtenidos en los ensayos en tiempo real estricto sobre circuitos electrónicos reales, constituyen el contenido de este capítulo.

## 4.2. El equipo de control en tiempo real

Un experimento en tiempo real estricto implica que éste se efectúe de tal forma que la respuesta a estímulos externos se produzca dentro de un cierto intervalo de tiempo acotado, predecible y prefijado a priori. Este determinismo temporal es una característica clave que sirve para distinguir entre los sistemas de control en tiempo real no estricto ("*soft real time control*", SRTC) y los de tiempo real estricto o duro ("*hard real time control*", HRTC) [Bennet (1995), Gazi *et al* (2001), Koga *et al* (1998)]. Para realizarlo en la práctica, interesa disponer de herramientas de desarrollo rápido de prototipos ("*rapid prototyping tool*", RPT), que se utilicen para simular procesos, probar los algoritmos y las estrategias de control de una forma realista, y que han de servir para el respaldo experimental de los diseños realizados.

El equipo que se ha utilizado para la experimentación, simulación y control de sistemas caóticos en tiempo real estricto, (véase la figura 4.1 y siguientes), consta de un entorno *software/hardware* de *dSPACE* [dSpace ©], concretamente

el *ACE Kit 1104*, compuesto por la *DS1104 R & D Controller Board*, con adaptador de conexiones y panel de diodos LED, un compilador *Microtec C* y también el software *ControlDesk* como entorno para desarrollo de los *interfaces HMI* (“*Human-Machine Interface*”) entre el usuario y el experimento.

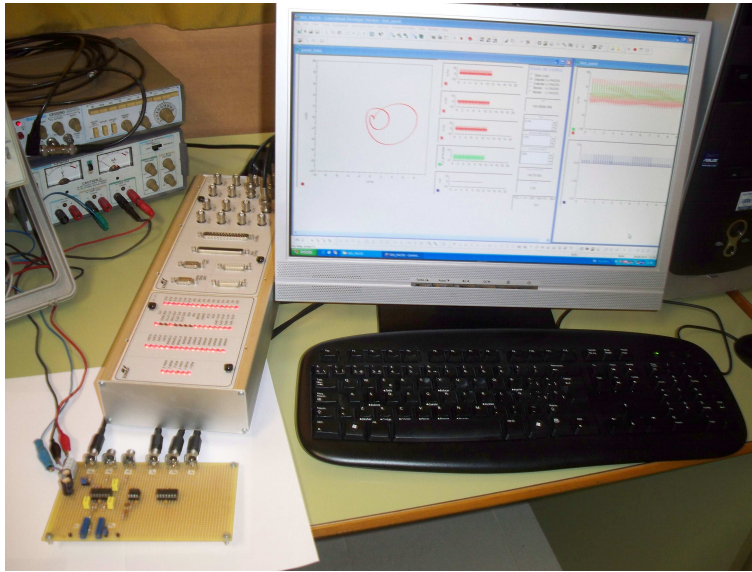


Figura 4.1: Montaje experimental. Entorno de trabajo.

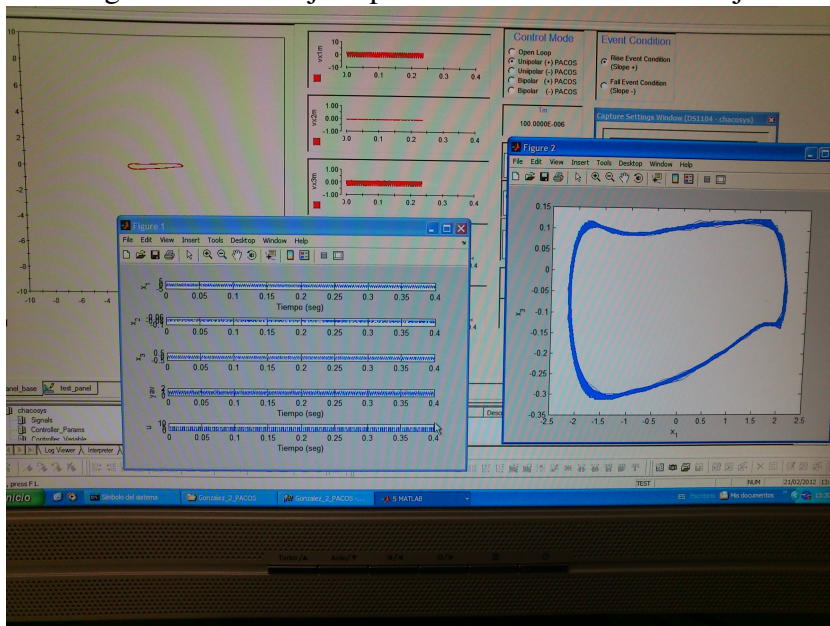


Figura 4.2: Montaje experimental. Interfase HMI y pos-procesado gráfico.

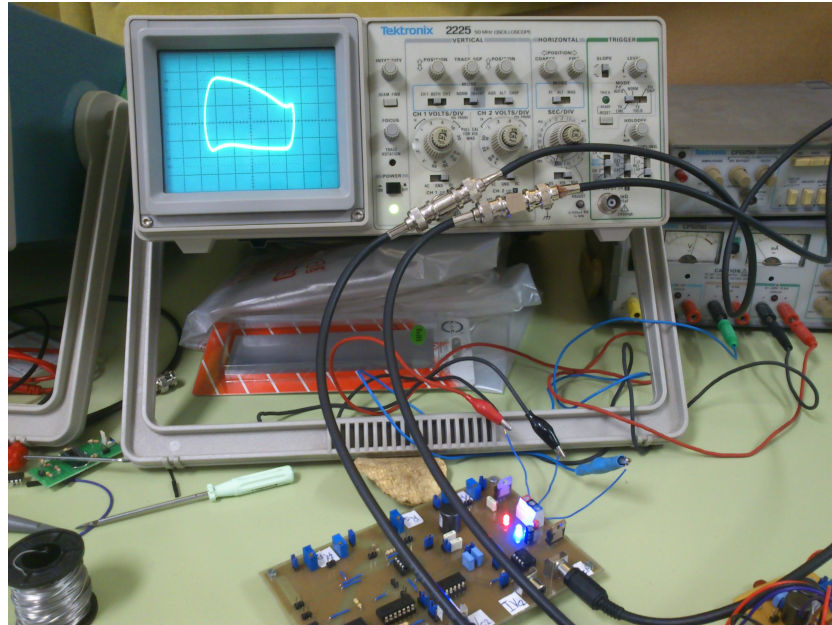


Figura 4.3: Montaje experimental. Señales en el osciloscopio en modo X-Y

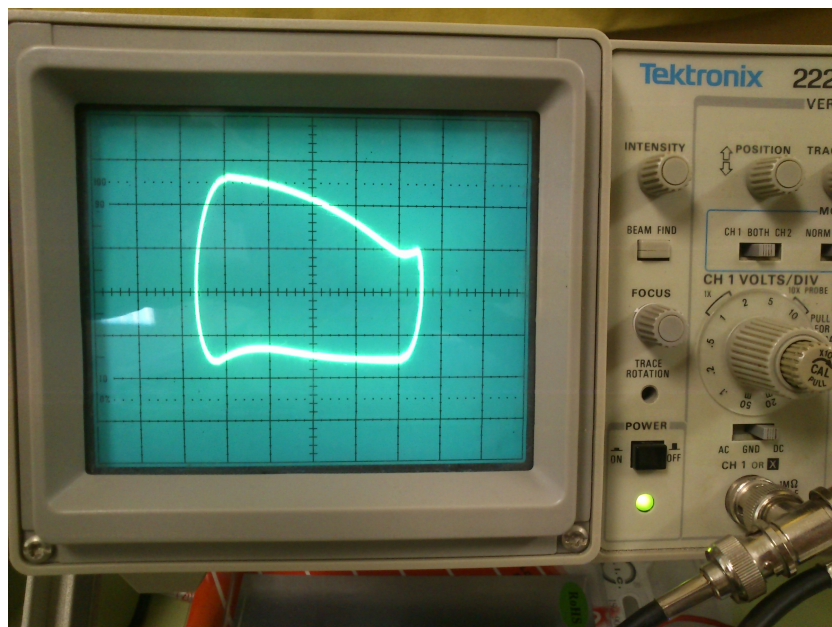


Figura 4.4: Montaje experimental. Modo X-Y detalle.

La tarjeta *DS1104* se instala en una ranura (*slot*) de bus PCI del PC utilizado como *host* PC, y la aplicación de tiempo real estricto desarrollada en *Microtec*



C se almacena en memoria tipo flash de la tarjeta *DS1104*, pudiéndose ejecutar, monitorizar y configurar desde *ControlDesk*. La potencia del sistema viene dada por los elementos que componen la *DS1104 R&D Controller Board* que incluye un procesador *PowerPC* con aritmética de punto flotante, doble precisión, funcionando a una frecuencia de 250 MHz, con sistema de entrada/salida basado en *TMS320F240 DSP microcontroller*. La unidad de entrada analógico/digital (*ADC*) tiene ocho canales (cuatro con 16 bits de resolución, y otros cuatro con 12 bits). La unidad de salida digital/analógica (*DAC*) es de ocho canales con 16 bits de resolución. Además, incluye una unidad I/O digital con veinte canales, interfase para dos encoders incrementales, salida de señal *PWM*, (monofásica y trifásica) e interfases para comunicaciones *RS-232*, *RS-422/RS-485*.

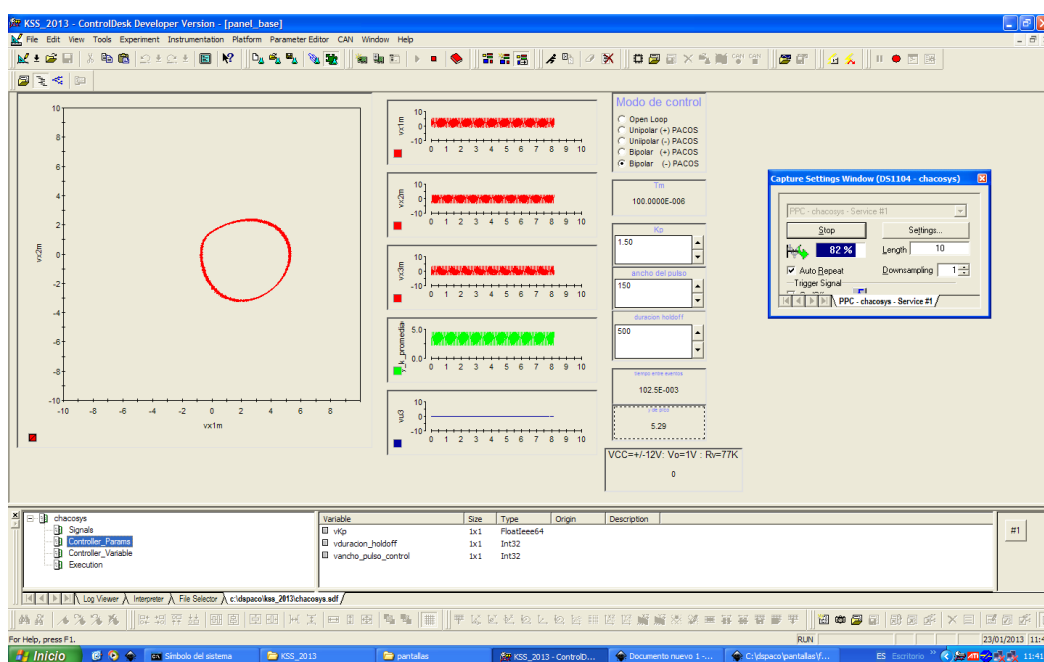


Figura 4.5: Ejemplo de HMI desarrollado en ControlDesk. El experimento muestra una trayectoria en el plano  $x_1$ – $x_2$ , el comportamiento de las señales en el tiempo, valores de los parámetros del controlador y algunos valores significativos de la última órbita estudiada.

Una vez generada en el *host PC* una aplicación de tiempo real estricto basada en compilador *Microtec C*, se transfiere el código ejecutable al hardware del



sistema embebido (“*embedded system*”), donde se ejecutará la aplicación en tiempo real. Mediante la aplicación HMI desarrollada en *ControlDesk* (figura 4.5), se podrá monitorizar la evolución de las señales, configurar la pantalla de interfase del operador y ajustar los parámetros del controlador diseñado o, en su caso, de la planta simulada, pues dependiendo del objetivo planteado, el sistema basado en *dSPACE 1104* se podrá utilizar como controlador o como simulador de proceso. Con esta *interface*, todas las señales de entrada y salida desde y hacia las tarjetas experimentales, pueden ser monitorizadas y también almacenadas junto con los valores de la fecha de muestreo y de los parámetros del controlador, en ficheros compatibles con Matlab para su procesamiento y representación gráfica *a posteriori* (ver figura 4.2).

### 4.3. Resultados experimentales

En esta sección se muestran los resultados obtenidos en cada uno de los circuitos experimentados.

Para cada caso, según sea la variante del modo de control elegido (Unipolar+, Unipolar−, Bipolar+, Bipolar−), se señalan los valores de los parámetros del controlador ( $T_m$ ,  $t_w$ ,  $K_p$ , y  $t_{holdoff}$ ), para los que se obtienen los comportamientos estabilizados presentados. Los resultados experimentales son independientes del momento en el que el operador aplica el control y la órbita obtenida en cada experimento es reproducible en ensayos efectuados en distintas fechas y condiciones del laboratorio.

Como se verá, los resultados experimentales obtenidos se muestran consistentes y coherentes con los de simulación numérica, presentados en el capítulo anterior, aunque se pueden apreciar las naturales diferencias, propias de las incertidumbres asociadas a las tolerancias de los componentes y a las existentes entre los circuitos operacionales reales y sus sencillos modelos idealizados [Ogorzalek (1998)].

En todos los experimentos se ha utilizado el mínimo tiempo de muestreo posible para la aplicación desarrollada en dSpace,  $T_m = 0,1ms$ , lo que ha resultado ser suficientemente pequeño para el caso del circuito KSS utilizado, muy ajustado para el caso del circuito de Gonzalez y resulta demasiado grande para el circuito de Chua, por lo que, para este último caso, ha habido que disminuir la velocidad del circuito implementado, mediante el conveniente escalado de tiempo, como se explica en la sección 4.3.3.

#### 4.3.1. Resultados experimentales en el circuito KSS

Como se dijo en el capítulo anterior, Kiers, Schmidt y Sprott (KSS) [Kiers *et al* (2004)], [Wiener *et al* (2006)], presentaron el circuito de la figura 4.7, en el que se puede obtener un comportamiento caótico.

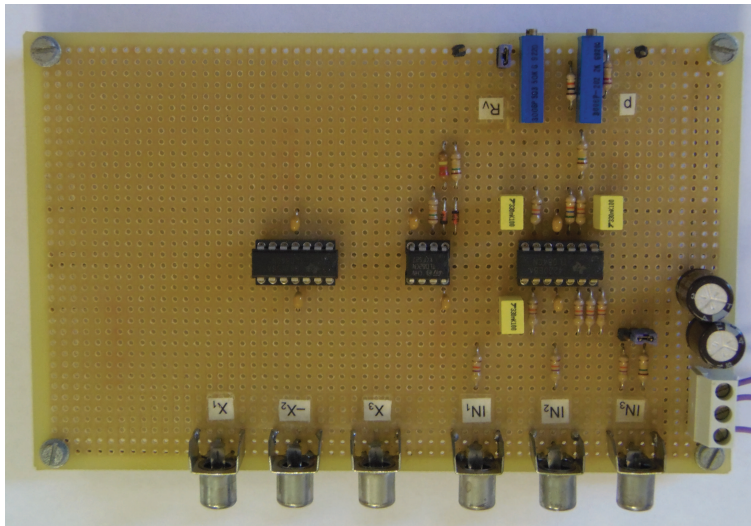


Figura 4.6: Circuito KSS. Tarjeta realizada.

En la realización práctica de este circuito (véase la figura 4.6), se han usado componentes estándares con tolerancias del 5 %. Los circuitos integrados son TL084 para construir la red integradora y el sumador de entrada y TL082 para

construir el lazo no lineal y el sumador que genera  $V_a$ . Los diodos son  $D_1 = D_2 = 1N914B$ . Para trabajar con frecuencias más rápidas que las obtenidas en [Kiers *et al* (2004)], se han cambiado los condensadores a  $C = 330$  nF, lo que supone un menor tiempo de experimentación.

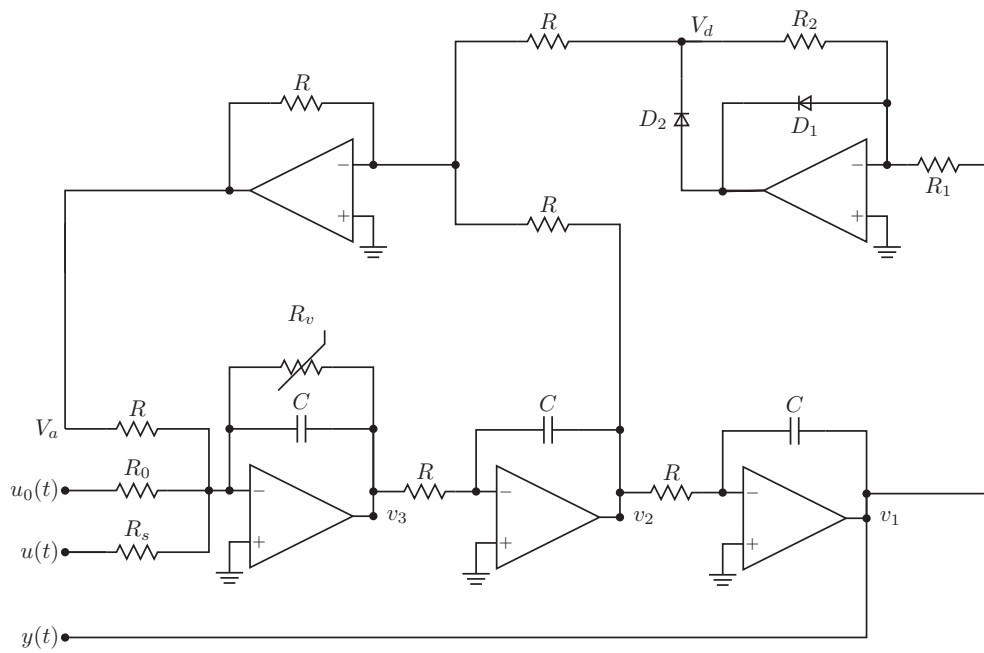


Figura 4.7: Circuito KSS.

Los valores nominales de los resistores son  $R_2 = 89,2$  k $\Omega$  (obtenido por la combinación paralelo de dos resistores, uno de 150 k $\Omega$  y otro de 220 k $\Omega$ );  $R_0 = R_s = 150$  k $\Omega$ ;  $R_1 = 15$  k $\Omega$ ;  $R = 47$  k $\Omega$ .  $R_v$  se ajusta a 77 k $\Omega$  para obtener comportamiento caótico [Kiers *et al* (2004)]. La tensión  $u_0$  es de 1V y las tensiones de alimentación son de  $\pm 12$  V.

La salida  $y_k$  observada es la tensión  $v_1$ , que se corresponde con la variable  $x_1$  del modelo matemático del sistema KSS:

$$\begin{aligned}
 D(x_1) &= -c(\min\{x_1, 0\}) \\
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 \dot{x}_3 &= -ax_3 - x_2 + D(x_1) - b(u_0 + u)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

con  $a = R/R_v$ ,  $b = R/R_0$ ,  $c = R_2/R_1$  y, en este caso, con la forma no lineal  $D(x_1) = c(\min\{x_1, 0\})$ .

El comportamiento caótico sin control (figura 4.8) muestra el atractor y sus innumerables órbitas inestables.

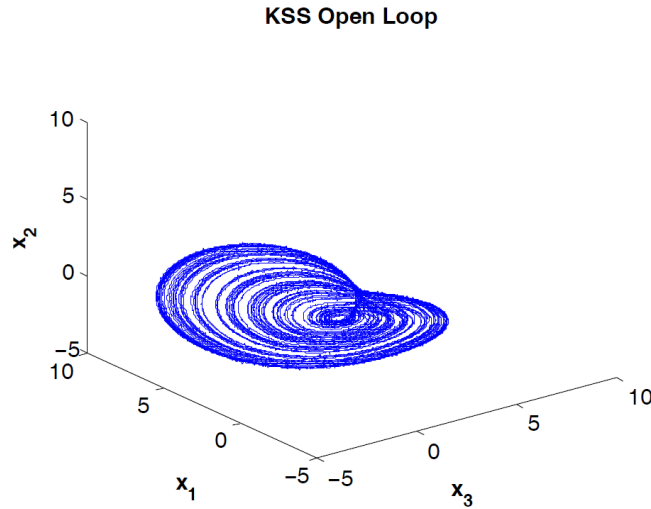


Figura 4.8: Circuito KSS. Comportamiento sin control

Siguiendo el procedimiento indicado en la sección 2.6, el muestreo se realizó con un  $T_m = 0,1 \text{ ms}$ . Como un intervalo de intervención o ancho de pulso igual a un periodo de muestreo es, en este caso, pequeño para modificar significativamente la dinámica desarrollada en la tarjeta KSS, éste se fijó en  $t_w = 15 \text{ ms}$  que resultó válido en todos los ensayos realizados en la tarjeta KSS. Nótese que aquí  $t_w = 150 \times T_m$ , a diferencia de las simulaciones del capítulo 3, donde si-

guiendo un criterio de “peor caso” y “mínima intervención”, el ancho se fijó en el mínimo posible  $t_w = T_m$ . Esto demuestra la importancia y flexibilidad del factor  $t_w$  para el operador en el algoritmo desarrollado. El tiempo de inhibición fue de  $t_{holdoff} = 50 \text{ ms}$ .

En estas condiciones, y para las diferentes formas de control, se ajustó la ganancia y bajo control unipolar con pulsos positivos, se obtuvieron los comportamientos de las figuras 4.9 y 4.10, con  $K_p = 0,45$  y la última órbita monitorizada mostró un tiempo de vuelo  $T_j = 71,6 \text{ ms}$  con un pico de  $y_{pj} = 7,92 \text{ V}$ .

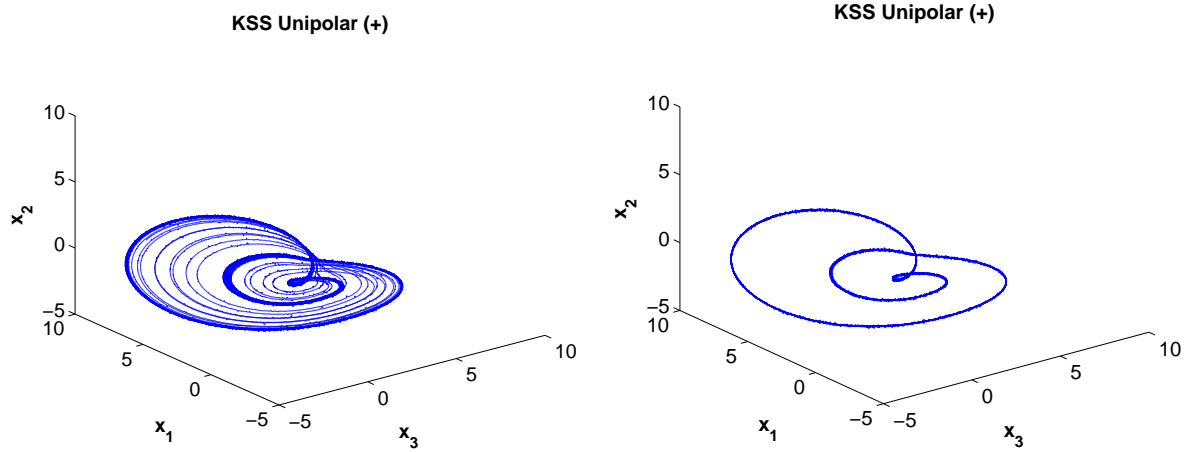


Figura 4.9: Circuito KSS: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo U+ ( $t > 5 \text{ s}$ ); *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 10 \text{ s}$ ).

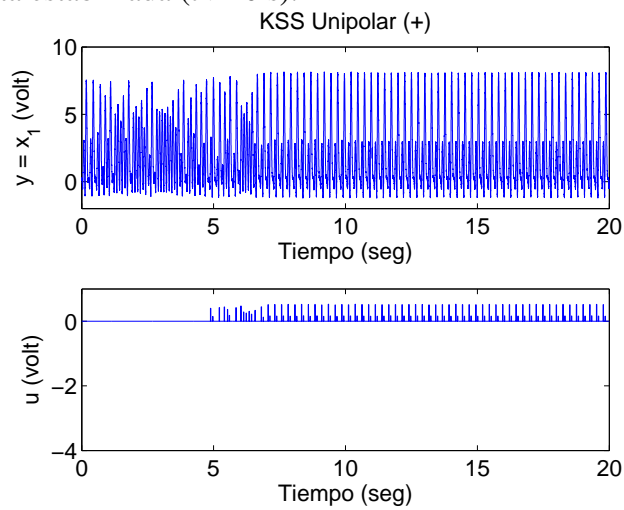


Figura 4.10: Circuito KSS: Señales U+.

Si se utiliza el modo unipolar con pulsos negativos  $U_-$ , al fijar la ganancia al valor  $K_p = 4$ , la última órbita monitorizada arrojó un tiempo de vuelo  $T_j = 102,4$   $ms$  y un pico de  $y_{pj} = 4,9$  V., como se ve en las figuras 4.11 y 4.12

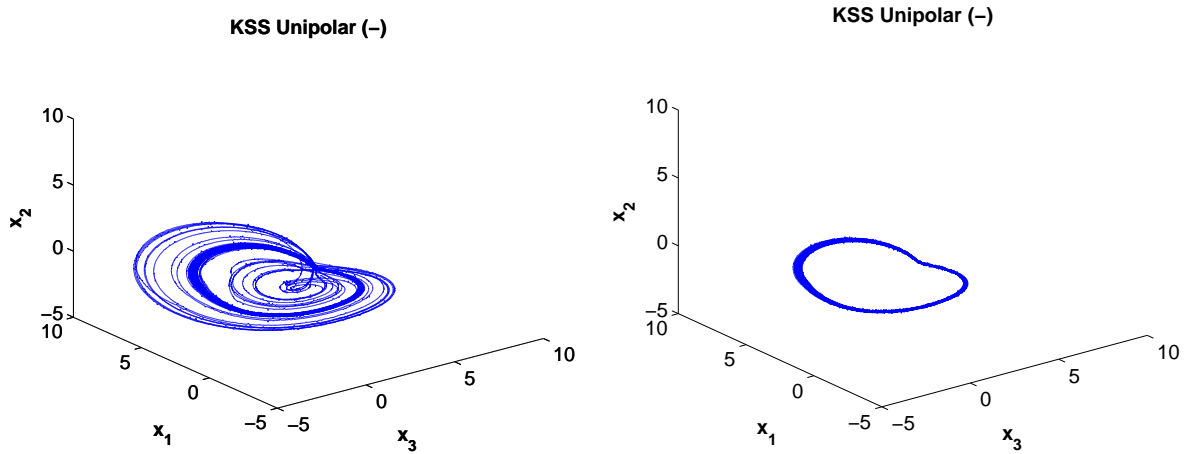


Figura 4.11: Circuito KSS: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo  $U_-$  ( $t > 2$  s.); *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 10$  s.).

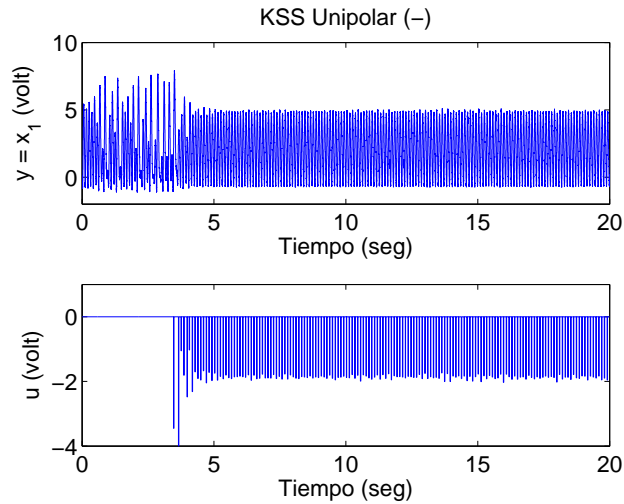


Figura 4.12: Circuito KSS: Señales en el modo  $U_-$ .

En los ensayos realizados con control bipolar positivo, la ganancia se ajustó en  $K_p = 0,6$ ; lo que dio como resultado que la última órbita medida tuviera un tiempo de vuelo de  $T_j = 76,4 \text{ ms}$  y un pico de  $y_{pj} = 8,11 \text{ V}$ . Los resultados aparecen en las figuras 4.13 y 4.14.

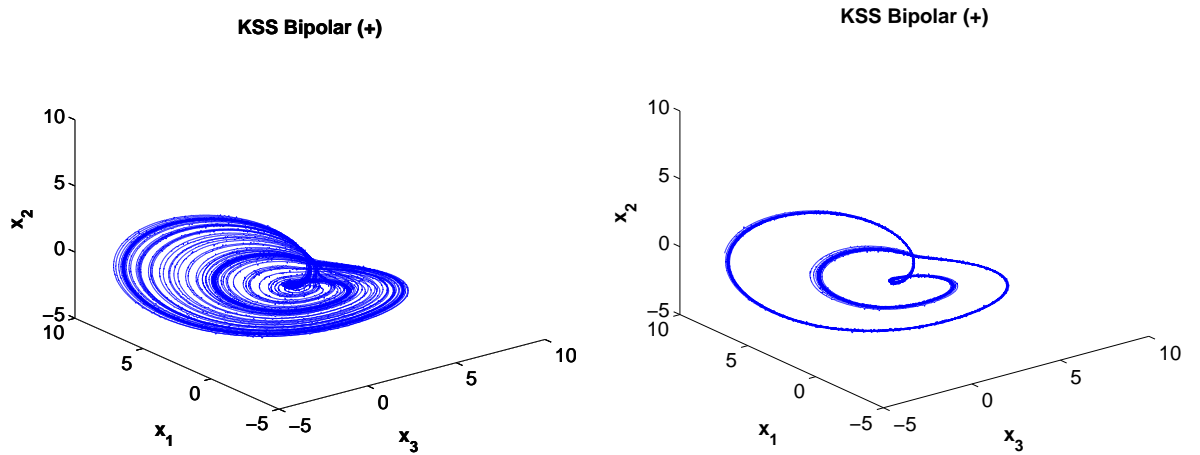


Figura 4.13: Circuito KSS: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo B+ ( $t > 5 \text{ s.}$ ); *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 10 \text{ s.}$ ).

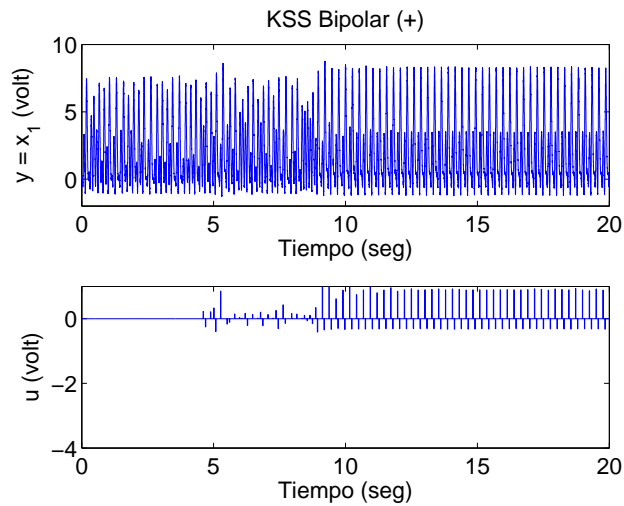


Figura 4.14: Circuito KSS: Señales B+

Por último, las figuras 4.15 y 4.16, muestran, los resultados bajo control bipolar negativo (B-). Con ganancia un valor de ganancia  $K_p = 1,5$ ; la última órbita monitorizada mostró un periodo (tiempo de vuelo) de  $T_j = 101,4 \text{ ms}$  con un pico de  $y_{pj} = 5,1 \text{ V}$ , Nótese que se obtuvo la estabilización con muy baja magnitud en la señal de control.

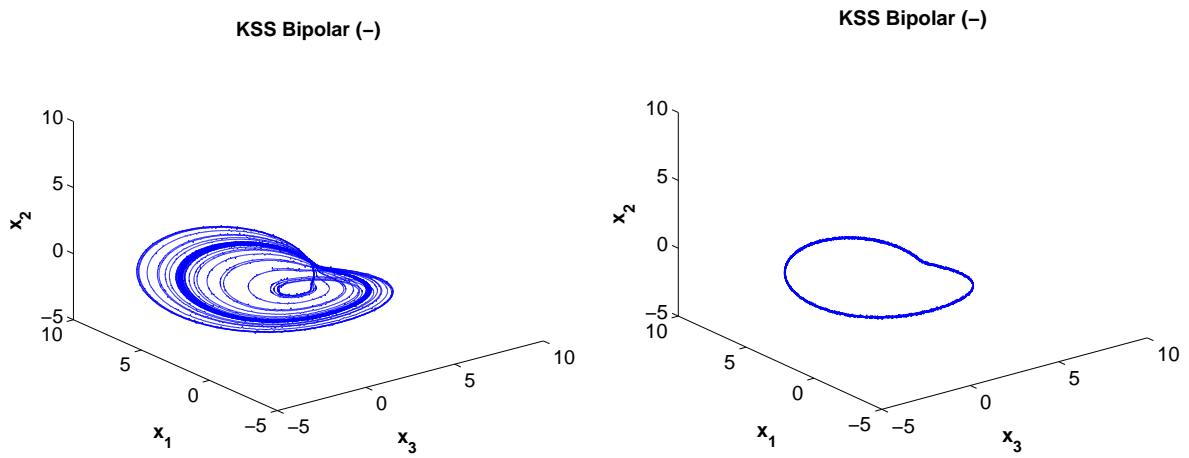


Figura 4.15: Circuito KSS: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo B- ( $t > 5$  s.); *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 10$  s.).

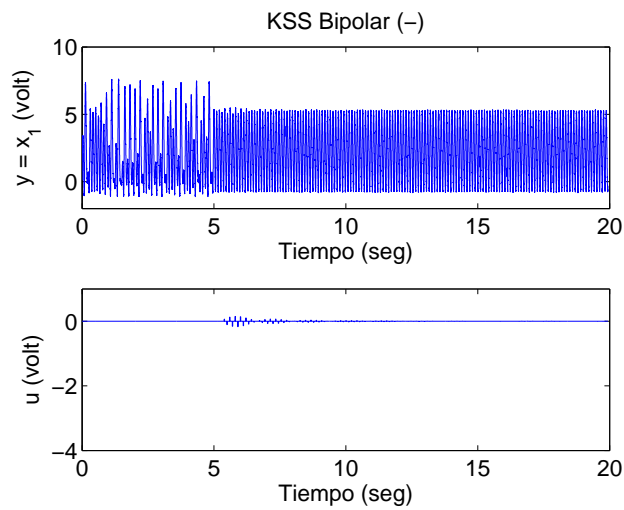


Figura 4.16: Circuito KSS: Señales B-.



### 4.3.2. Resultados experimentales en el circuito de González

En el oscilador de puente de Wien modificado de González, para poder tener accesibles las tres variables de estado de su modelo matemático (4.2) [González *et al* (2005)], al circuito básico se le han añadido diversos circuitos operacionales para la adaptación de impedancias y para la amplificación diferencial, lo que ha dado como resultado el circuito mostrado en la figura 4.18 que ha quedado montado como se ve en la figura 4.17.

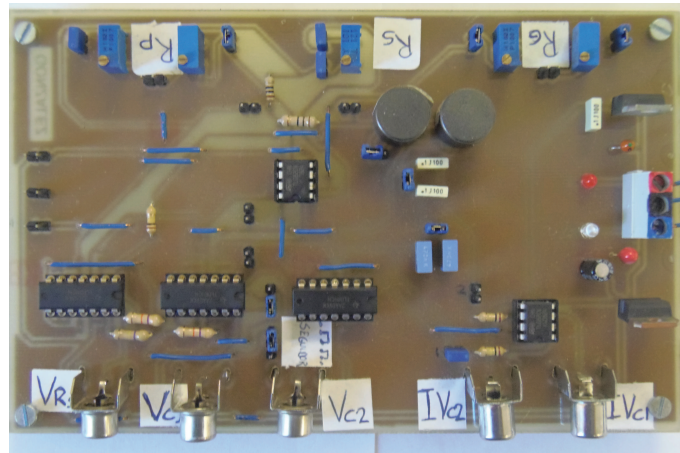


Figura 4.17: Tarjeta experimental.

Si bien este circuito no ha sido escalado en tiempo, se tuvo especial cuidado en atenuar convenientemente las tensiones obtenidas en los extremos de la resistencia  $R_{sh}$  (sensor de la corriente  $x_1$ ) para no saturar los amplificadores operacionales que permiten la medida.

Los pulsos de control se inyectan a través de un amplificador separador y de una resistencia  $R_s = 100k\Omega$ , al nodo formado por la entrada al amplificador, el condensador  $C_1$  y la resistencia  $R$  (véase la figura 4.18). Este nodo también define la tensión de salida  $y_3$  que corresponde a la variable de estado  $x_3(t)$  del modelo (4.2) que es la variable de estado medida.

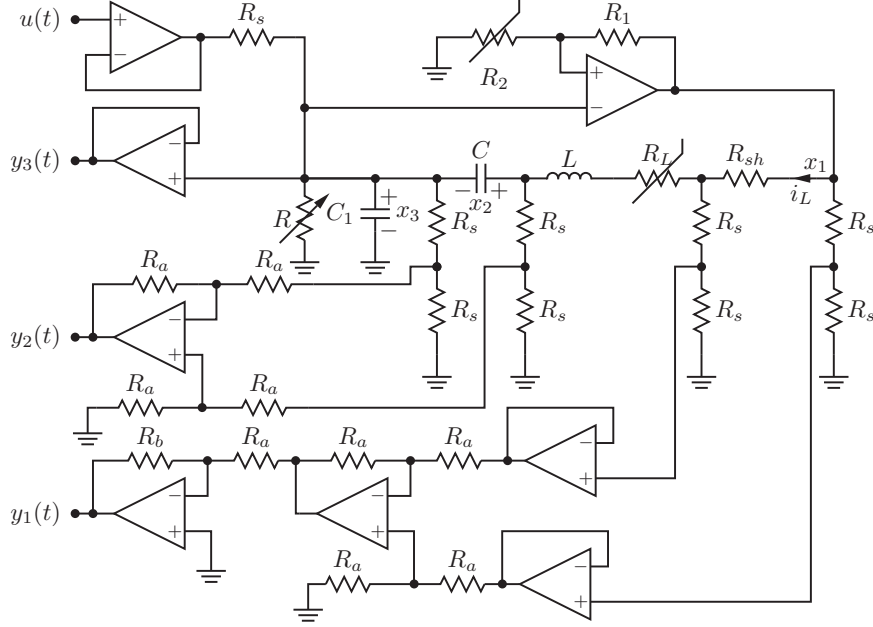


Figura 4.18: Circuito de González.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= (1/L)(f - R_L x_1 - x_2) \\
 \dot{x}_2 &= (1/C)x_1 \\
 \dot{x}_3 &= (1/C_1)(x_1 - x_3/R - (x_3 - u)/R_s) \\
 f &= (A/2)(|x_3 + V_S/A| - |x_3 - V_S/A|) - x_3
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

En la tarjeta experimental se emplean circuitos integrados TL082 para la red no lineal ( $V_S$  en el modelo es la tensión de saturación de este amplificador), y TL084 para los amplificadores separadores. Los valores de los componentes son:  $L = 0.1$  H, con un ajuste del potenciómetro  $R_L$  para obtener un total de  $90 \Omega$  en la rama serie incluyendo la resistencia de medida de la corriente  $R_{sh} = 20 \Omega$  y la propia del devanado del inductor ( $38.5 \Omega$ ).

Los valores de otros componentes son: para los condensadores son  $C = 100 \times 10^{-9}$  F y  $C_1 = 470 \times 10^{-9}$  F, el valor de  $R$  se ajusta a  $24 k\Omega$ , y las otras

resistencias son:  $R_s = 100k\Omega$ ,  $R_a = 47k\Omega$ ,  $R_b = 470k\Omega$ ,  $R_1 = 47k\Omega$ . El ajuste de  $R_2 = 8.82k\Omega$  se hace para obtener caos con una ganancia  $A = (1 + R_1/R_2) = 6.4$ . Las tensiones de alimentación son de  $\pm 12$  V.

Con estos valores se tiene en la salida  $y_2$  una medida de  $x_2/2$  y en la salida  $y_1$  una medida de  $100x_1$ , siendo  $x_1$  y  $x_2$  las otras dos variables de estado del modelo (4.2) que se monitorizan únicamente por su utilidad para la representación gráfica.

El comportamiento caótico que se obtiene al muestrear sin aplicar control durante un intervalo de dos segundos se presenta en la figura 4.19.

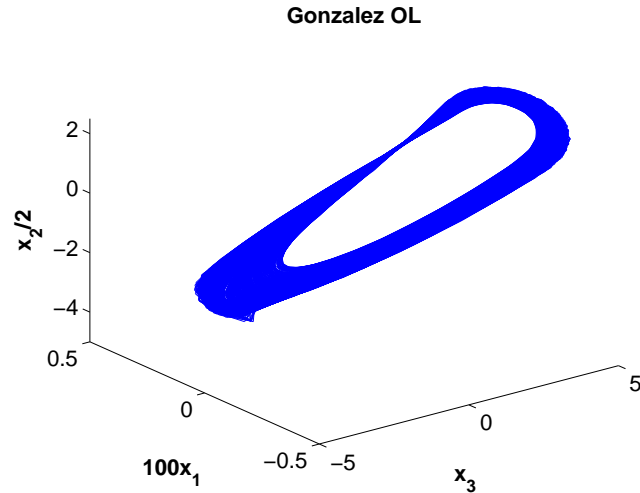


Figura 4.19: Circuito de González. Comportamiento sin control.

Los resultados bajo control se muestran en las figuras 4.20 a 4.26. En todos los casos se empleó un muestreo de  $T_m = 0.1$  ms, el ancho de pulso se fijó en  $t_w = 1$  ms. Obsérvese que en este caso,  $t_w = 10 \times T_m$ , es un ancho suficiente para lograr reconducir al atractor a una órbita periódica en lazo cerrado. El tiempo de inhibición fue de  $t_{holdoff} = 1$  ms. Se adquirieron datos durante dos segundos (estando en una situación de caos desde al menos un segundo antes) y los resultados, de las órbitas estabilizadas que se muestran, corresponden al último medio segundo. Las señales observadas y de control se presentan en detalle durante el primer segundo para hacer notar el transitorio.

Con el procedimiento indicado en la sección 2.6, en el modo unipolar U+, la ganancia necesaria fue de  $K_p = 0,018$ , obteniéndose un tiempo de vuelo de  $T_j = 2,7ms$ <sup>1</sup> y una amplitud de pico de  $y_p = 4,6$  V.

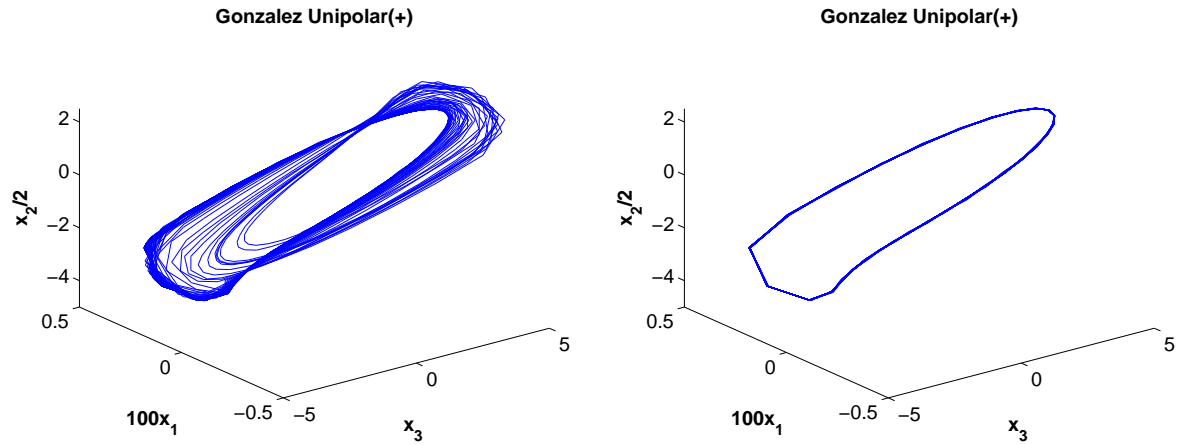


Figura 4.20: Circuito de González: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo U+ ( $t > 0.2$  s.); *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 0.5$  s.)

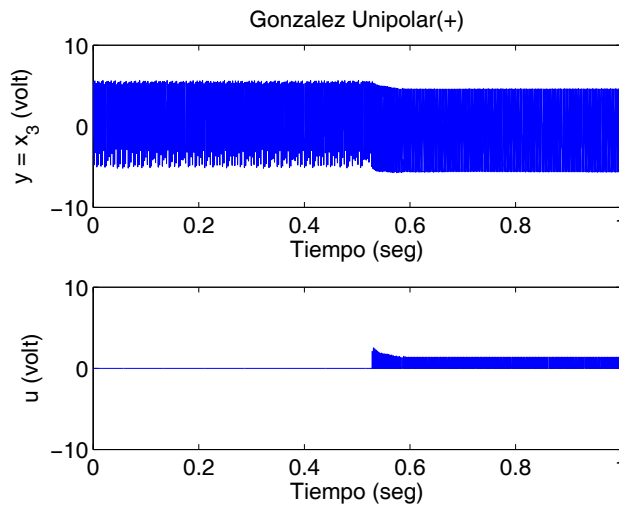


Figura 4.21: Circuito de González: Señales U+.

<sup>1</sup>Nótese que este tiempo de vuelo representa 27 muestras, de ahí que el mínimo periodo de muestreo disponible queda en este caso muy ajustado, como se comentó en la sección 4.3.

Al utilizar el modo Unipolar– con el mismo 1ms de ancho de pulso, la ganancia necesaria fue  $K_p = 0,225$ , obteniéndose los resultados que se muestran en las figuras 4.22 y 4.23, con un tiempo de vuelo de  $T_j = 3,9 \text{ ms}$  y una amplitud de pico de  $y_p = 5,3 \text{ V}$  en la última órbita muestreada.

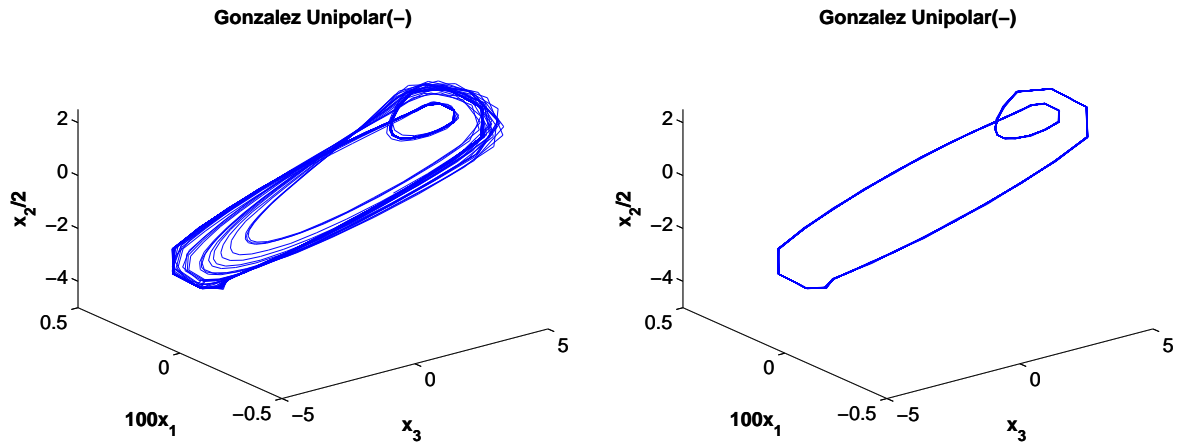


Figura 4.22: Circuito de González: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo U– ( $t > 0.2 \text{ s.}$ ); *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 0.5 \text{ s.}$ )

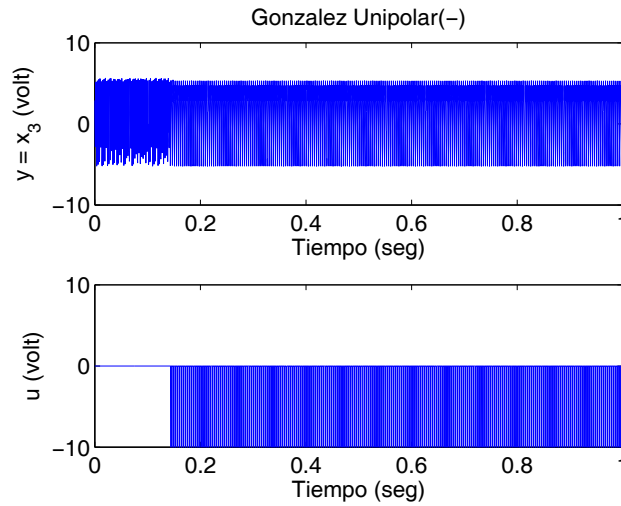


Figura 4.23: Circuito de González: Señales U–

Cuando se seleccionó el modo B+, con una ganancia  $K_p = 0,055$ , se obtuvo, para la última órbita medida, un tiempo de vuelo de  $T_j = 2,4ms$  y una amplitud de pico de  $y_p = 5,7$  V.

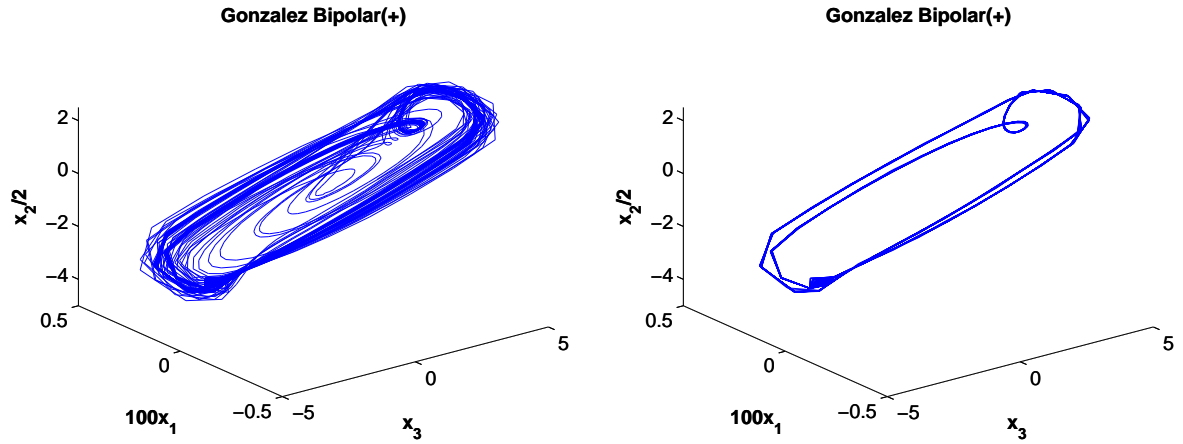


Figura 4.24: Circuito de González: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo B+ ( $t > 0.2$  s.); *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 0.5$  s.)

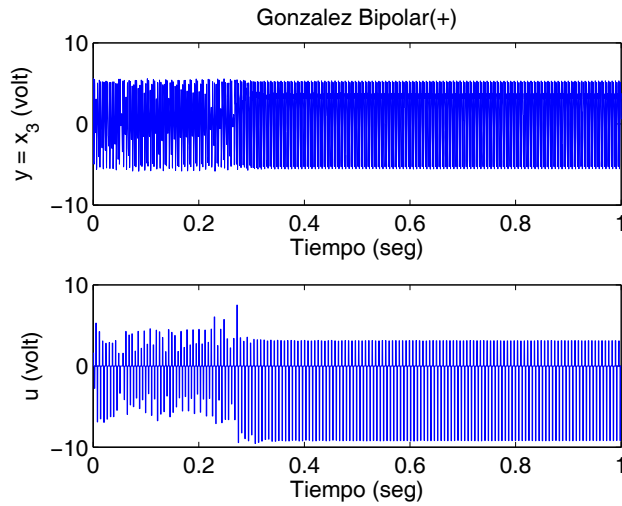


Figura 4.25: Circuito de González: Señales B+

Con el modo Bipolar-, los resultados se muestran en las figuras 4.26 y 4.27, la ganancia necesaria para la estabilización fue  $K_p = 0,016$ , y la última órbita monitorizada ofreció un tiempo de vuelo de  $T_j = 2,7ms$  con una amplitud de pico de  $y_p = 5,4$  V.

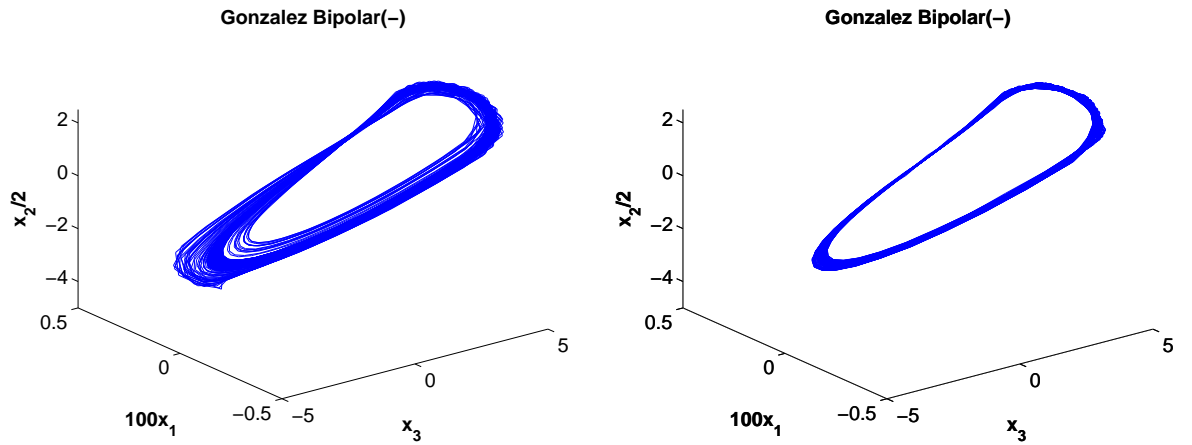


Figura 4.26: Circuito de González: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo B- ( $t > 0.2$  s.); *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 0.5$  s.)

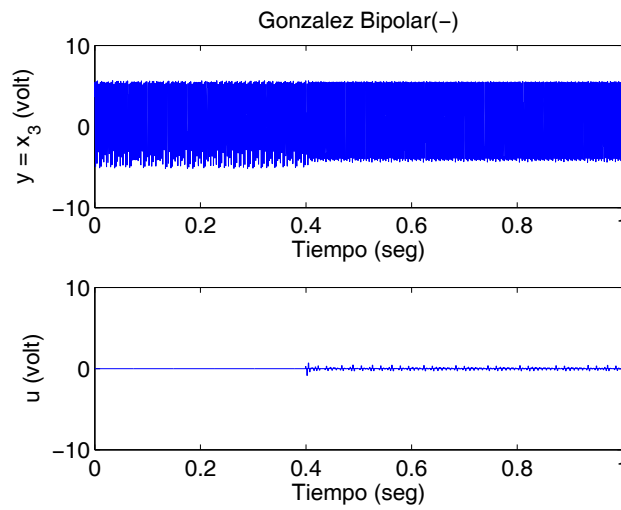


Figura 4.27: Circuito de González: Señales en el modo B-.

### 4.3.3. Resultados experimentales en el circuito de Chua

Como se dijo anteriormente, el sistema caótico de Chua [Chua *et al* (1986), Chua y Huynh (1993), Murali y Sinha (2003), Jing *et al* (2015)], responde al modelo matemático (4.3):

$$\begin{aligned} g &= m_0 x_1 + 1/2(m_1 - m_0)(|x_1 + B_p| - |x_1 - B_p|) \\ \dot{x}_1 &= (1/C_1)[(x_2 - x_1)/R - g] \\ \dot{x}_2 &= (1/C_2)[(x_1 - x_2)/R + x_3 - (x_2 - u_2)/R_S] \\ \dot{x}_3 &= (1/L)[-x_2 - (R_L + R_0)x_3] \end{aligned} \quad (4.3)$$

cuyos parámetros son:  $m_{01} = 1/R_1$ ,  $B_{p1} = (R_3/(R_2 + R_3))E_{sat}$ ,  $m_{11} = -1/R_3$ ,  $m_{02} = 1/R_4$ ,  $B_{p2} = (R_6/(R_5 + R_6))E_{sat}$ ,  $m_{12} = -1/R_6$ ,  $m_0 = (m_{01} + m_{02})$ ,  $m_1 = (m_{11} + m_{12})$ ,  $B_p = B_{p2}$ .

Este sistema puede ser realizado por un circuito basado en amplificadores operacionales TL082 (ver [Kennedy *et al* (1992)] para una descripción completa).

Dado que para los valores reflejados en ([Kennedy *et al* (1992)]) las trayectorias caóticas resultan ser demasiado rápidas para el mínimo periodo de muestreo que puede obtenerse en la aplicación desarrollada en dSpace,  $T_m = 0,1ms$ , se hace necesario realizar un escalado en tiempo cambiando el condensador  $C_1$  de  $10nF$  a  $C_1 = (10 + 47)nF$ , lo que representa un factor de  $57/10 = 5,7$ . El condensador  $C_2$  se cambió también, pasando de  $100nF$  a  $C_2 = (100 + 470)nF$  lo que origina el mismo factor de escala  $570/100 = 5,7$  y el inductor cuyo valor de  $0,018H$  se cambia por uno de  $= 0,100H$ , lo que representa un factor de escala de  $100/18 = 5,6$ , el mas próximo posible a  $5,7$  con componentes comerciales convencionales.



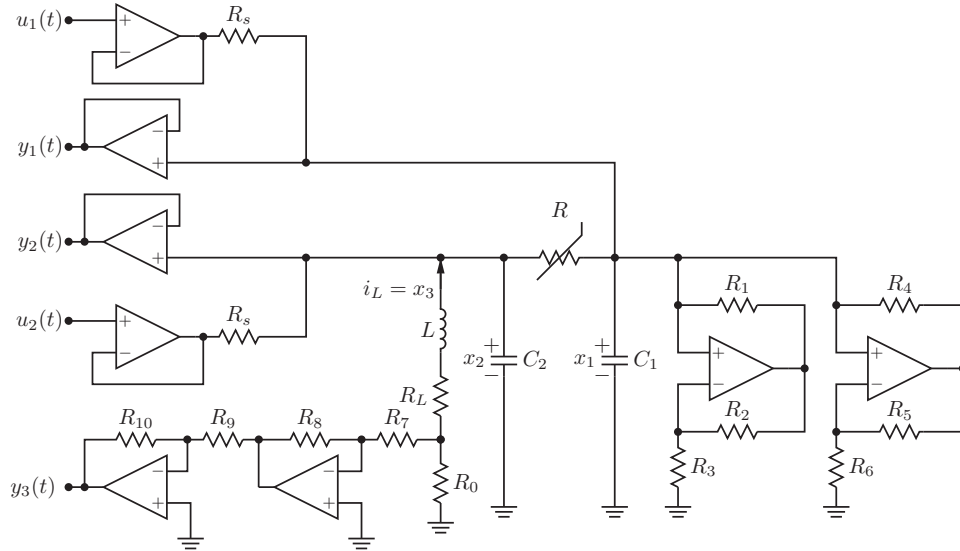


Figura 4.28: Circuito de Chua.

El circuito se ha representado en la figura 4.29. Se han añadido amplificadores separadores TL084 para observar las salidas  $y_1$  e  $y_2$  que se corresponden con las variables de estado  $x_1$  y  $x_2$  del modelo [Chua *et al* (1986)], la salida  $y_3$  permite obtener el valor  $500 \times x_3$  a través de la resistencia de medida  $R_0 = 5\Omega$  (dos de  $10\Omega$  en paralelo) y de una amplificación  $\times 100$ . También se usan separadores TL084 para aplicar posibles señales de control  $u_1, u_2(t)$  sobre  $v_1, v_2$  (via  $R_S = 100K\Omega$ ).

Por tanto, los valores de los componentes son:  $L = 0,100H$ ,  $C_1 = (10 + 47)nF$ ,  $C_2 = (100 + 470)nF$ ,  $R_1 = 220\Omega$ ,  $R_2 = 220\Omega$ ,  $R_3 = 2200\Omega$ ,  $R_4 = 22000\Omega$ ,  $R_5 = 22000\Omega$ ,  $R_6 = 3300\Omega$  y  $R_L = 13.5\Omega$ , la resistencia de la bobina.

El valor de  $R = 1388\Omega$ , difiere del señalado en [Kennedy *et al* (1992)] ( $R = 1790\Omega$ ) pues la presencia de  $R_0$  y  $R_S$ , así como la composición realizada

para el escalado y la lectura de las variables, requiere reajustar  $R$  para obtener caos. Las tensiones de alimentación son  $\pm 9V$ .

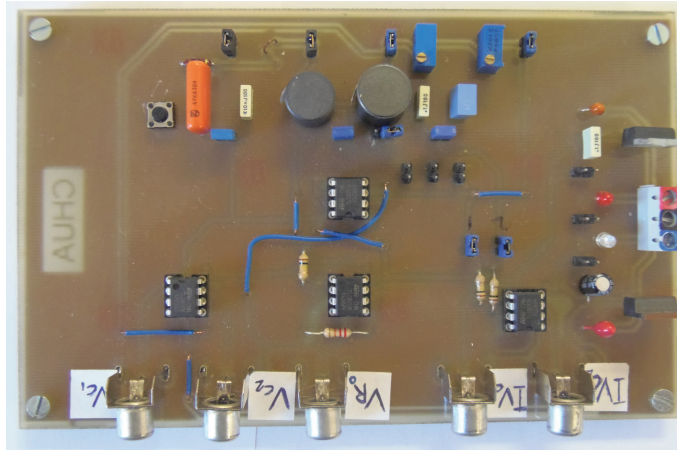


Figura 4.29: Tarjeta experimental de Chua.

A continuación se presentan los resultados obtenidos midiendo la variable de estado  $x_1$  con un periodo de muestreo de  $T_m = 0,1ms$  y adquiriendo durante dos segundos. Las figuras de las órbitas muestran el comportamiento estabilizado obtenido después de  $1,5s$ , mientras que las figuras de las señales  $y(kT_m)$ ,  $u(kT_m)$  ofrecen en detalle el primer segundo, para visualizar el transitorio hacia el establecimiento del régimen periódico.

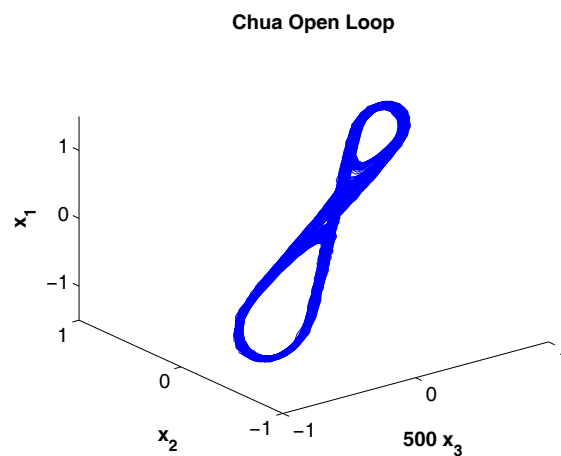


Figura 4.30: Circuito de Chua. Comportamiento sin control

De acuerdo con el procedimiento de ajuste indicado en la sección 2.6, con el modo Unipolar+ y  $K_p = 0,010$ , el ancho de pulso se fijó en un valor  $t_w = 0,2\text{ms}$  (dos muestras) y el tiempo de inhibición fue de  $t_{holdoff} = 1\text{ms}$  (usado también en los otros casos). Las figuras 4.31 y 4.32, muestran el comportamiento estabilizado obtenido. La última órbita monitorizada mostró un tiempo de vuelo  $T_j = 3,2\text{ms}$  con un pico de  $y_{pj} = 1,44\text{V}$ .

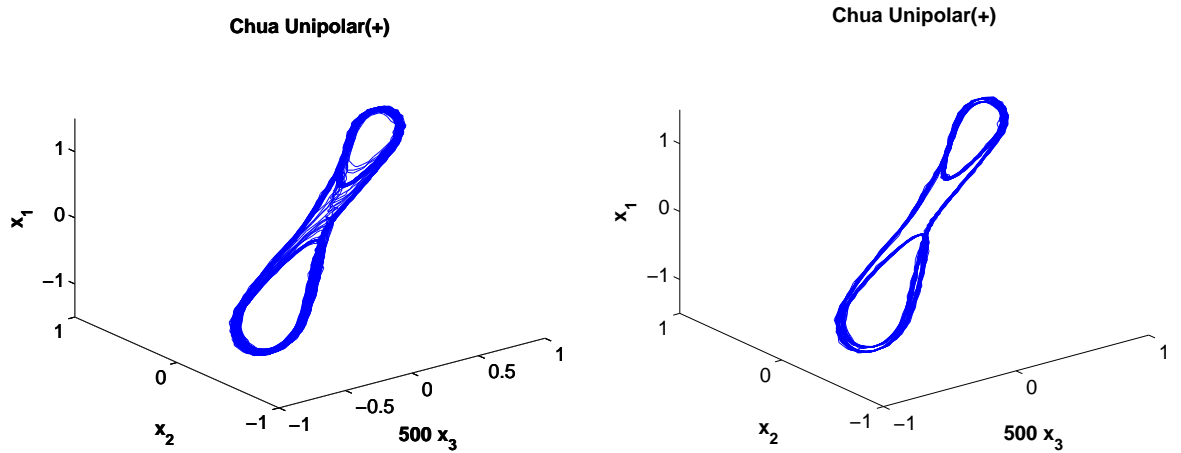


Figura 4.31: Circuito de Chua: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo U+ ( $t > 1.2\text{ s.}$ ); *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 1.5\text{ s.}$ )

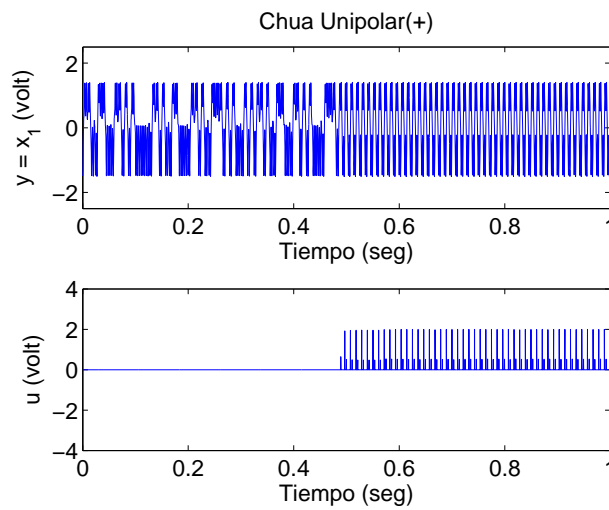


Figura 4.32: Circuito de Chua: Señales con U+.

Para ensayar el control con el modo Unipolar–, fue necesario cambiar la ganancia a  $K_p=0,041$ , con la que se obtuvo una órbita estabilizada en uno de los dos “scrolls” [Chua *et al* (1986)], como se ve en las figuras 4.33 y 4.34. Para la última órbita monitorizada, el tiempo de vuelo fue de 2,9 *ms* con una amplitud de pico de 1,41 V. .

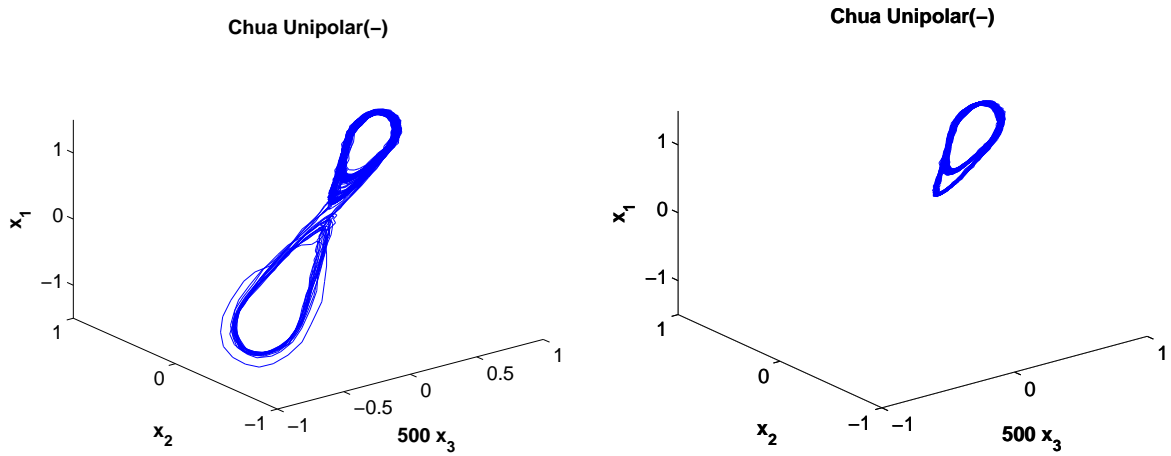


Figura 4.33: Circuito de Chua: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo U– ( $t > 1.2$  s), *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 1.5$  s)

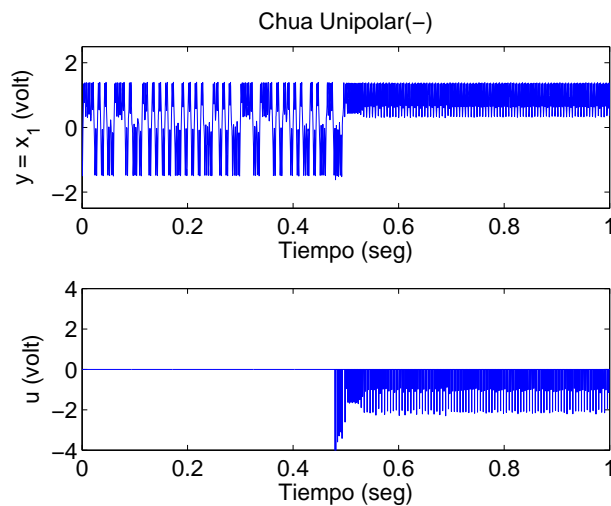


Figura 4.34: Circuito de Chua: Señales en el modo U–.

Cuando se ensayó el modo Bipolar+ con una ganancia  $K_p=0,011$  se obtuvo el comportamiento que muestran las figuras 4.35 y 4.36. Esta órbita estabilizada muestra que está compuesta por varias oscilaciones, para la última monitorizada se obtuvo un tiempo de vuelo de  $T_j = 3,9 \text{ ms}$  con una amplitud de pico  $y_{pj} = 1,43 \text{ V}$ .

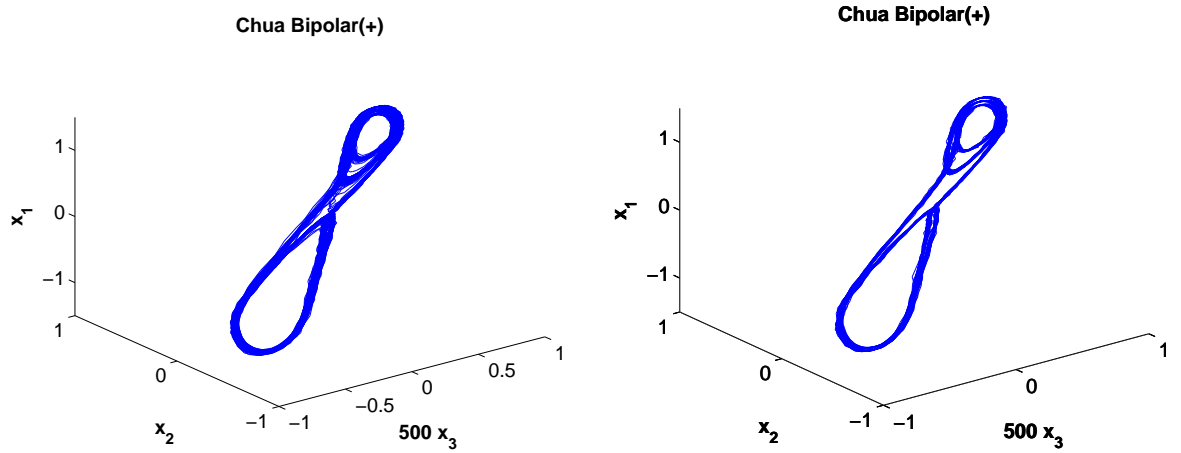


Figura 4.35: Circuito de Chua: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo B+ ( $t > 1.2 \text{ s.}$ ); *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 1.5 \text{ s}$ )

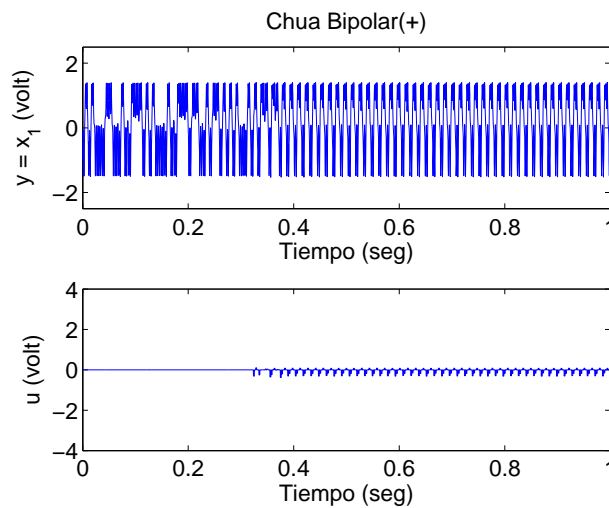


Figura 4.36: Circuito de Chua: Señales con B+.

Al someter al circuito con la variante Bipolar-, se usó, a modo de comprobación de su efecto sobre órbita resultante, un ancho de pulso mayor  $t_w = 1ms$ , mientras que la ganancia se retocó a  $K_p = 0,013$ . La última de ellas que quedó monitorizada mostró un tiempo de vuelo de  $T_j = 3,3 ms$  y una amplitud de pico de 1,40 V.

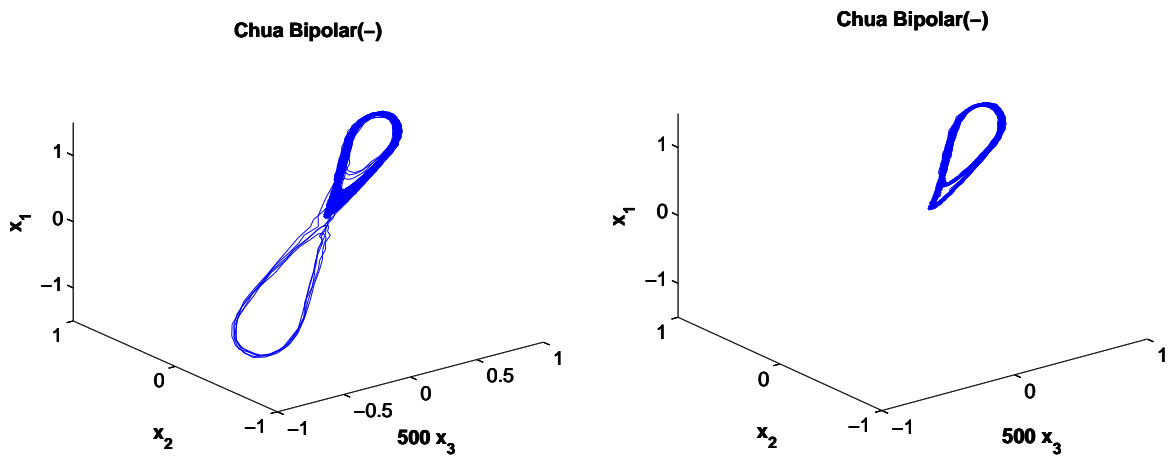


Figura 4.37: Circuito de Chua: *izda.* Tránsito a órbita estabilizada con modo B- ( $t > 1.2$  s.); *dcha.* Órbita estabilizada ( $t > 1.5$  s.)

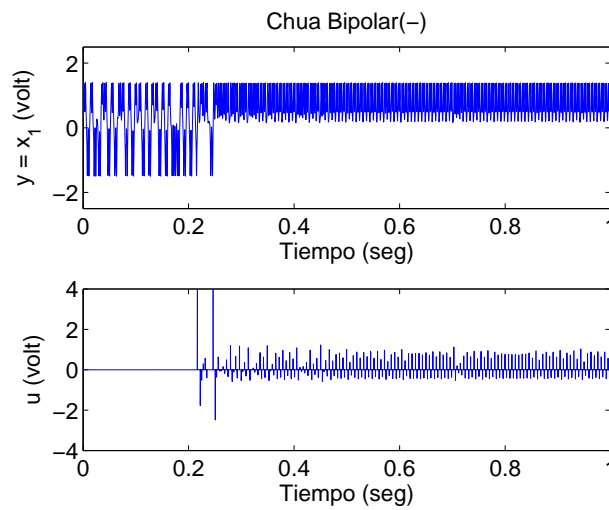


Figura 4.38: Circuito de Chua: Señales en el modo B-.

#### **4.4. Resumen, crítica y limitaciones experimentales**

Si bien con la simulación numérica en todos los sistemas sobre los que se ha aplicado, el método ha demostrado que logra el objetivo de estabilización en una órbita periódica, ha sido sobre los circuitos reales donde se ha puesto a prueba la capacidad del control por pulsos. En efecto, dejando atrás las dificultades de la realización práctica de las tarjetas experimentales, las naturales diferencias en los parámetros de los circuitos caóticos implementados respecto de sus modelos matemáticos, el ruido realmente presente en las medidas y las limitaciones propias de los métodos experimentales, los resultados obtenidos pueden someterse a consideraciones críticas, entre las que destacan:

La limitación del mínimo tiempo de muestreo en dSpace a 0.1ms, aunque con el circuito KSS no se encontraron dificultades, ha sido determinante en los sistemas más rápidos de González y Chua. Al construir el valor de evento con un número pequeño de datos y no tener información de la evolución del sistema durante un intervalo de tiempo relativamente “grande”, la condición de evento variable calculada tiene una mayor incertidumbre en cada oscilación, tanto en su amplitud como en su fecha; sin embargo, aunque el efecto de dicha incertidumbre sobre las órbitas estabilizadas resultantes muestra que éstas sólo presentan ligeras diferencias en amplitud y fase, hay que hacer notar que el método no podría aplicarse a sistemas para los que este tiempo de muestreo resultara demasiado grande.

También habría que señalar las limitaciones del software de almacenamiento y post-procesado de los datos, pues se han realizado los experimentos con limitación del tiempo de ensayo porque los ficheros de datos resultaban considerablemente grandes. Cuando los ensayos se realizaban sin registro y sin esta limitación temporal, se pudo constatar la robustez del método al conseguir órbitas reproducibles con independencia del momento de aplicación del control (y por tanto de condiciones iniciales, como en la simulación numérica).





## **Capítulo 5**

### **Conclusiones**



## Conclusiones

Tras lo expuesto en los capítulos precedentes, se puede afirmar que se ha conseguido el objetivo general de esta memoria, ya que el método propuesto estabiliza a todos los sistemas caóticos considerados en la misma, en una órbita periódica que, en algunos casos, puede aproximarse a una UPO del sistema sin control. También, *se han logrado los objetivos específicos*, pues:

1. Se ha desarrollado un método de control discreto, basado en eventos, con una condición de evento variable que queda gobernada por la propia dinámica del sistema.
2. Se ha presentado un procedimiento en tiempo discreto con muestreo periódico  $T_m$  que usa pulsos de ancho  $t_w$ .
3. El método está basado en un algoritmo de control no lineal que aprovecha la información obtenida de la observación por muestreo de una sola variable medida, sin necesitar ningún conocimiento previo de un modelo matemático de los sistemas experimentados.
4. Se han desarrollado cuatro variantes de la ley de control propuesta (Unipolar+, Unipolar-, Bipolar+, Bipolar-), que posibilitan la elección por el operador de aquella que resulte de mejores prestaciones para cada caso concreto.
5. Los pulsos de control son aplicados a los circuitos a través de una única entrada accesible. Se sintetizan (para la variante del algoritmo elegida), según los parámetros que establece el operador, y de las características dinámicas propias, muy diferentes, en cada sistema caótico considerado.
6. Los resultados de simulación numérica con varios sistemas caóticos representativos, han demostrado su eficacia y utilidad, tanto bajo condiciones de muestreo ideal, como bajo condiciones de ruido de medida y restricciones a la señal de control.

7. Se han presentado los resultados experimentales obtenidos al aplicar el método presentado sobre tres tipos de circuitos electrónicos caóticos (KSS, González y Chua, convenientemente escalados) con dinámicas muy diferentes.
8. El algoritmo se ha soportado en un sistema de control en tiempo real estricto (dSpace), para la medida y materialización de las señales de control.
9. Este algoritmo puede ser utilizado por un operador de planta sin conocimiento alguno sobre teoría de control de sistemas caóticos, para lo cual se ha especificado un procedimiento sencillo para el ajuste del controlador.

La utilidad demostrada por el método sobre los sistemas considerados, abre una interesante oportunidad de aplicabilidad en otros sistemas caóticos presentes en diferentes campos de la ingeniería de control, tales como en dispositivos y sistemas electrónicos y en el control de vibraciones entre otros; ya que una vez conseguida la periodicidad, resulta sencillo su sostenimiento.

## Líneas de continuación

Como posibles líneas de investigación que continuarían este estudio, se indican las siguientes:

1. La justificación teórica de la estabilidad del control.
2. La posibilidad de seleccionar “*a priori*” la órbita estable que finalmente será obtenida bajo control.
3. La posibilidad de automatizar la búsqueda de los valores de  $K_p$  y  $t_w$ .
4. La ampliación del método para aquellos casos en los que, en los sistemas considerados, se puedan usar varias variables medidas y varias variables controladas.

## Publicaciones

Las publicaciones que se derivan directamente de lo expuesto en esta tesis son:

- Verdulla, F.M., M.J. López and M. Prian. (2009). “A pulsed control method for chaotic systems” *IEEE Latin America Transactions*, **7**, no. 1, pp. 1 11.
- Verdulla, F.M., M.J. López and M. Prian. (2011). “Control de sistemas caóticos basado en condición de evento variable ajustada a la dinámica del proceso” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, **8**, no. 1, pp. 159 166.
- Verdulla, F.M., M.J. López and M. Prian. (2011). “An Experimental Realization of a Pulsed Control Method for the KSS Chaotic Circuit” *IEEE Latin Amer. Trans.*, **9**, 3, 240 247.
- Verdulla, F.M., M.J. López and M. Prian. (2012). “A pulsed control method for chaotic oscillations” *AIP Conf. Proc.* **1431**, pp. 660 667 doi: 10.1063/1.4707621
- Verdulla, F.M., M.J. López and M. Prian. (2015). “Experimental variable even based control for Chua and Gonzalez chaotic circuits”. Enviado a *IEEE Latin Amer. Trans.*.

También se ha participado, dentro del grupo GAPSIS de la Universidad de Cádiz, en otras publicaciones relacionadas con sistemas caóticos:

- López, M.J., M.Prian and F.M. Verdulla. (2006). “Chaos Control Method”. *Internal Report Nov. 2006*. Dpto. ISA. UCA.
- López, M.J., F.M. Verdulla and M. Prian. (2007). “Chaos Control Based on Nonlinear State Feedback and Linear H-infinite Controller Synthesis”. *WSEAS Trans. on Syst.*, **1**, 6, 68 75
- López, M.J., F. M. Verdulla, M. Prian, J. Lorenzo, L. García (2010). Metodología para análisis de sistemas y circuitos electrónicos caóticos. Actas de Congreso TAAE (Tecnologías Aplicadas a la Enseñanza de la Electrónica), CD, 12 páginas, ISBN TAAE USB: 978-84-96737-67-9. Madrid.
- Prian, M., M.J. López and F.M. Verdulla. (2009). “Estabilización de órbitas periódicas inestables en sistemas caóticos mediante controlador híbrido”. Dpto. ISA, UCA.
- Prian, M., M.J. López and F.M. Verdulla. (2011). “Chaos Stabilization via Hybrid Control” *IEEE Latin America Transactions*, **9**, no. 3, pp. 252 262.
- Prian, M., M.J. López and F.M. Verdulla. (2012). “Chatter chaos rejection by adaptive control” *AIP Conf. Proc.* **1431**, 676 -683. doi: 10.1063/1.4707623
- Prian, M., M.J. López and F.M. Verdulla.(2015). “Análisis de un sistema de control híbrido adaptativo que estabiliza órbitas periódicas inestables embebidas en atractores caóticos” *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, no. 12, pp. 154 165.



# Bibliografía

- [Abed y Fu (1986)] Abed, E. H.; Fu, J. H. (1986), “Local feedback stabilizations and bifurcation control, I Hopf bifurcation”. *Systems and Control Letters* **7** pp 11 17.
- [Abed *et al* (1995)] Abed, E.H., H.O. Wang, and A. Tesi. (1995). “Control of Bifurcations and Chaos”. *The Control Handbook*, CRC Press and IEEE Press, pp 951 966.
- [Abed *et al* (1992)] Abed, E.H., H.O. Wang, and R.C. Chen. (1992). “Stabilization of Periodic Doubling Bifurcations and Implications for Control of Chaos”. *Proceeding of the 31th Conference on Decision and Control*, Tucson, Arizona, Dec. 1992 IEEE Press, pp 2119 2124.
- [Ando *et al* (2010)] Ando, H., Boccaletti, S., and Aihara, K. (2010). “Adaptive Feedback Control of Periodic Orbits in Chaotics Systems”. Cap. 3 in *Recent Progress in Controlling Chaos*, World Scientific Publishing Co.
- [Andrievskii y Fradkov (2003)] Andrievskii, B.R. y A.L. Fradkov. (2003). “Control of Chaos: Methods and Applications. I. Methods”, *Automation and Remote Control*, **64**, 5, 673 713.
- [Andronov y Chaikin (1949)] Andronov A.A., C.E. Chaikin, (1949). “Theory of Oscillations”, English Ed. Solomon Lefschetz, Princenton University Press.
- [Astrom y Wittenmark (1995)] Astrom, K. J., T. Häggglund . “PID Controllers: Theory, Design and Tuning”. Instrument Society of America (ISA).
- [Astrom y Wittenmark (2002)] Astrom, K. J., and B. Wittenmark. “Adaptive Control”. Addison Wesley
- [Aracil (1999)] Aracil, J. (1999). “Las matemáticas y la ingeniería”. *Conferencia pronunciada en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla el 9 de noviembre de 1999*.
- [Aracil (2011)] Aracil, J. (2011). “El Ingeniero Científico o Casa con Dos Puertas Mala Es de Guardar”, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, **8**, 1, 5 13.
- [Arecchi *et al* (1998)] Arecchi, F.T., Boccaletti, S., Ciofini, M., Meucchi, R. and Grebori, C. (1998). “The Control of Chaos: Theoretical schemes and experimental realizations” *International Journal of Bifurcation and Chaos* **8**, no. 8 pp. 1643 1655.
- [Basso *et al* (1999)] Basso, M., Genesio, R., Giovanardi, L., Tesi, A. (1999) “Frequency domain methods for chaos control”. In: *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*. Ed. G. Chen, CRC Press, Boca Raton, FL, pp. 179 204.
- [Bennet (1995)] S. Bennet. “Real-time Computer Control”. Ed. Prentice Hall.
- [Boccaletti *et al* (2000)] Boccaletti, S., C. Grebogi, Y.C. Lai, H. Mancini and D. Maza. (2000). “The Control of Chaos: Theory and Applications”. *Physics Reports* no. 329, pp. 103 197.

- [Brindley y Kapitaniak (1994)] Brindley, J. and T. Kapitaniak. (1994). "The control of chaos by a dynamical absorber" in *Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics*, J.M.T. Thompson, S.R. Bishop, Ed., John Wiley and Sons, Ltd., pp. 163 169.
- [Candaten y Rinaldi (2000)] Candaten, M. and S. Rinaldi. (2000). "Peak-to-peak dynamics: a critical survey" *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **10**, no. 8, pp. 1805 1819.
- [Celikovsky y Chen (2002)] Celikovsky, S. and Chen G., (2002) "On a Generalized Lorenz Canonical Form of Chaotic Systems". *Internat. Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**, 8, 1789 1812.
- [Chang (2000)] Chang, D.E. (2000) "Normal forms and Bifurcation of Control Systems" *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia, December 2000, pp 1602 1607
- [Chen (1999)] Chen, G. (1999). "Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems". CRC Press.
- [Chen y Ueta (1999)] Chen, G. and Ueta T. (1999) "Yet Another Chaotic Attractor", *International Journal of Bifurcation and Chaos* vol 9, no. 7, pp. 1465 1466.
- [Chen et al (2000)] Chen, G., Moiola, J., Wang, H.O. (2000) "Bifurcation Control: Theories, Methods and Applications". *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. **10**, nº 3, pp. 511-548.
- [Chen et al (2003)] Chen, G., D.J. Hill, X. Yu (Eds.) "Bifurcation Control. Theory and Applications." Springer-Verlag.
- [Chen y Yu (2003)] Chen, G., and X. Yu (Eds.) "Chaos Control. Theory and Applications." Springer-Verlag.
- [Chua et al (1986)] Chua, L. O., M. Komuro and T. Matsumoto. (1986). "The Double Scroll Family" *IEEE Transactions On Circuits And Systems*, **CAS-33**, no. 11, pp. 1073 1118.
- [Chua y Huynh (1993)] L. O. Chua and L. T. Huynh, (1993) "Bifurcation Analysis of Chua's Circuit" *IEEE Proc. of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, vol. 1, pp. 746 751.
- [Corron et al (2002)] N. J. Corron and S. D. Pethel (2002) "Control of long-period orbits and arbitrary trajectories in chaotic systems using dynamic limiting" *Chaos* vol. 12, no. 1 2002.
- [Dang (2006)] Dang Vu-Delcarte, C. "Normal Forms and Bifurcations of Vector Fields" in *Chaos in Automatic Control* Edited by W. Perruquetti and J.P. Barbot. CRC Press Taylor and Francis Group.
- [DeCarlo et al (1995)] DeCarlo, R.A. S.H. Zak, S.V. Drakunov. (1995). "Variable Structure, Sliding-Mode Controller Design". *The Control Handbook*, CRC Press and IEEE Press, pp941 951.
- [DeFeo et al (2000)] de Feo. O., Maggio, G. M. and Kennedy, M. P. (2000) "The Colpitts Oscillator: Families Of Periodic Solutions And Their Bifurcations" *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 10, no. 5 pp. 935 958.
- [dSpace ©] dSpace. <http://www.dspaceinc.com>
- [Fiedler et al (2007)] Fiedler, B., V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, and E. Schöll. (2007). "Refuting the Odd-Number Limitation of Time-Delayed Feedback Control" *Phys Rev Lett* **98**, no. 11, pp. 4101-1 4101-4.



- [Fradkov y Chen (Unesco EOLSS)] Fradkov, A.L., G. Chen “Control of Chaos and Bifurcations” UNESCO EOLSS Control Systems, Robotics and Automation, Vol XIII, <http://www.eolss.net>.
- [Fradkov *et al* (2006)] Fradkov, A. L. R.J. Evans and B. Andrievsky (2006) “Control of Chaos: methods and applications in mechanics” *Philosophical Transactions of The Royal Society*, **4**, no. 364, pp. 2279 2307.
- [Fradkov y Pogromsky (2008)] Fradkov, A. and A. Pogromsky (2008) “Nonlinear and Adaptive Control of Chaos” in *Handbook of Chaos Control* Edited by E. Schöll and H.G. Schuster. 2nd Ed -WILEY-VCH Verlag.
- [Freeman y Kokotovic (1995)] Freeman, R.A., P.V. Kokotovic. (1995). “Lyapunov Design”. *The Control Handbook*, CRC Press and IEEE Press, pp 932 940.
- [Gallegos *et at* (2004)] Gallegos, J. A. and Mejía, O. P. (2004) “Chaos Suppression Of An Underactuated Manipulator: Experimental Results.” *IEEE Latin America Trans.*, **2**, 1, 19 24.
- [Gazi *et al* (2001)] Gazi, V., M. L. Moor, K. M. Passino, W. P. Shackleford, F. M. Proctor, J. S. Albus, “The RCS Handbook. Tools for real-time control systems software development”. Wiley.
- [Ge *et al* (2000)] Ge, S.S., C. Wang and T. H. Lee (2000) “Adaptive Backstepping Control os a class of Chaotics Systems” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. **10**, No. 5 1149 1156
- [Goebel *et al* (2009)] Goebel, R., Sanfelice, R. and Teel, A. R. (2009). “Híbrido Dinamical Systems” *IEEE Control System Magazine* pp. 28 93.
- [González y Piro (1984)] González, D. L. and Piro, O. (1984). “Disappearance of chaos and integrability in an externally modulated nonlinear oscillator”. *Phys Lett A* **30** 5 2788 2790.
- [González *et al* (2005)] González, R., M. Prian, M.A. Fernandez, J.L. Rojas and E. Romero. (2005). “A Symmetric Piecewise-linear Chaotic system with a Single Equilibrium Point.” *Int.Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 15, no. 4 pp. 1411 1415.
- [González-Miranda (2004)] González-Miranda, J. M. (2004) “Synchronization and Control of Chaos. An Introduction for Scientists and Engineers”. *Imperial College Press*.
- [Grabec (1988)] Grabec, I. (1988) “Chaotic dynamics of the cutting process”. *Internat.Journal Machine Tools and Manufac.* **28**, 1. pp. 19-32.
- [Guemez y Matias (1993)] Güemez, J. and M.A. Matias. (1993). “Control of chaos in unidimensional maps”. *Phys Lett A* no. 181 pp. 29 32.
- [Guckenheimer y Holmes (1983)] Guckenheimer, J.; Holmes, P. (1983) “*No linear oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*”, Springer-Verlag, New York.
- [Hanna y Tobias (1974)] Hanna, N. H. and Tobias, S. A. (1974) “A Theory of Nonlinear Regenerative Chatter”. *J. Eng. for Industry* 96, 247.
- [Hoppensteadt (2000)] Hoppensteadt, F.C. (2000) “Analysis and Simulations of Chaotics Systems” 2nd. ed. Springer-Verlag.
- [Hunt (1991)] E. R. Hunt, (1991) “Stabilizing high-period orbits in a chaotic system: The diode resonator”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67
- [Hunt y Johnson (1993)] Hunt E. R. and G. Johnson, (1993) “Keeping chaos at bay”. *IEEE Spectrum* November pp. 32 36

- [Jing *et al* (2015)] Jing, C-G., He, P., Fan, T. Li, Y., Chen, C. and Song, X. 2015) "Single state feedback stabilization of unified chaotic system ann circuit implementation" *Open Phys.* 13 111 122
- [Kapitaniak *et al* (1993)] Kapitaniak, T., Lj. Kokarev and L.O. Chua. (1993) "Controlling Chaos without feedback and control signals" *emphInt. J. of Bifurcation and Chaos*, vol. **3**, pp. 324.
- [Khalil (1995)] Khalil, H. K.. "Lyapunov Stability". *The Control Handbook*, CRC Press and IEEE Press pp 889 895.
- [Kang (1997)] Kang, W. "Invariants and Stability of Control Systems with Transcritical and Saddle-node Bifurcations" *Proceedings of 36th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, California USA December 1997. pp. 1162 1167
- [Kang y Li (1997)] Kang, W; Liang, K. "The Stability and Invariants and Stability of Control Systems with Pitchfork or Cusp Bifurcations" *Proceedings of 36th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, California USA December 1997. pp. 378 383
- [Kennedy *et al* (1992)] Kennedy, M. P. "Robust OP Amp realization of Chua's Circuit" *Frequenz* **46**, no. 3-4, pp. 66 80.
- [Kennedy (1994)] Kennedy, M. P. "Chaos in the Colpitts Oscillator" *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory And Applications*, vol. 41, no. 11, pp. 771 774.
- [Kiers *et al* (2004)] Kiers, K., Schmidt D. and Sprott, J. C. (2004). "Precision measurements of a simple chaotic circuit" *American Journal of Physics* **72**, no. 4, pp. 503 509.
- [Koga *et al* (1998)] Koga, M., H. Toriumi, M. Sampei (1998), "An integrated software environment for the design and real-time implementation of control systems", *Control Engineering Practice* 6, pp. 1287 1293.
- [Kozlov *et al* (1997)] Kozlov, A. Osipov, G. and Shalfeer, V. "Suprpesing Chaos in continuos systems by impluse control" *IEEE Proc. of the 1st Internatinal Conference on Control of Oscillations and Chaos*, vol. 3, pp. 578 581 1997.
- [Krstic y Kokotovic (1995)] Krstic, M., P.V. Kokotovic. (1995). "Adaptive Nonlinear Control". *The Control Handbook*, CRC Press and IEEE Press, pp 980 993.
- [Larrondo *et al.*(1996)] Larrondo, H. A., D. R. Avalos and R. A. Laura. (1996). "Dynamics of a Kicked Oscillator with a Delay in Its Parametric Feedback Loop: An Analytical Study", *Nonlinear Dynamics*, **11** no. 4 pp. 407 419.
- [Leine y Campenb (2006)] Leine R.I., D.H. van Campenb, "Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems", *European Journal of Mechanics A/Solids* 25, 595 616
- [Li *et al* (2008)] Li, J. Xua, W. Yang, X. and Sun, Z. "Chaotic motion of Van der Pol-Mathieu-Duffing system under bounded noise parametric excitation". *Journal of Sound and Vibration* 309 330-337.
- [Liberzon (2003)] Liberzon, D., "Switching in systems and Control", *Birkhauser*, Boston.
- [Litak (2001)] Litak. C. "Chaotic vibrations in a regenerative cutting process". *Chaos, Solitons and Fractals*, 13 1531-1535.
- [Liu *et al* (2004)] Liu, C. Liu, T. Liu, K. and Liu, L. "A new chaotic attractor " *Chaos, Solitons and Fractals*, 22, 1031 1038.
- [López *et al* (2006)] López, M.J. , M.Prian and F.M. Verdulla. (2006). "Chaos Control Method". *Internal Report Nov. 2006*. Dpto. ISA. UCA.

- [López *et al* (2007)] López, M.J., F.M. Verdulla and M. Prian. (2007). "Chaos Control Based on Nonlinear State Feedback and Linear H-infinite Controller Synthesis". *WSEAS Transactions on Systems*, **1**, **6**, pp. 68 75. ISSN 1109-2777
- [López *et al* (2010)] López, M.J., F. M. Verdulla, M. Prian, J. Lorenzo, L. García (2010). "Metodología para análisis de sistemas y circuitos electrónicos caóticos". *Actas de Congreso TAAE (Tecnologías Aplicadas a la Enseñanza de la Electrónica)*, CD, 12 páginas, ISBN TAAE USB: 978-84-96737-67-9. Madrid.
- [Lorenz (1963)] Lorenz, E. N. "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journals of the atmospheric sciences*, vol. **20** pp. 130 141.
- [Lu *et al* (2002)] Lu, J. , Chen, G. , Cheng, D. and Celikovsky, S. (2002) "Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system" *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, vol. **12**, no. 12, pp. 2917 2926.
- [Macau *et al* (2008)] Macau, Elbert E. N. and Celso Grebogi (2008) "Controlling Chaos" in *Handbook of Chaos Control*, 2nd Ed. Edited by E. Schöll and H.G. Schuster WILEY-VCH Verlag.
- [Matias y Güemez(1994)] Matias, M.A. and J. Güemez. (1994). "Stabilization of chaos by proportional pulses in system variables". *Phys Rev Lett* **72** no. 10 pp. 1455 1458.
- [Mascolo y Grazi (1999)] Mascolo, S. and G. Grazi, (1999) "Controlling Chaotic Dynamics using backstepping desing with application to the Lorenz system and Chua circuits" *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. **9**, No. 7 pp 1425 1434
- [Mathwork ©] Mathworks. Matlab/Simulink, [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)
- [Meucci *et al* (1997)] Meucci, R., Labate, A., Ciofini, M. (1997) "Controlling chaos by negative feedback of subharmonic components", *Phys. Rev. E*, Vol. **56**, pp. 2829 2834.
- [Mira (1997)] Mira, C. "Some historical aspects of nonlinear dynamics". Possible trends for the future". *Journal of the Franklin Institute*, vol334, Issues 5-6, Sep- Nov 1997, pp 1075 - 1113. Pub. Pergamon - Elsevier Science Ltd.
- [Mira (2006)] Mira, C. (2006). "Bifurcation and Chaos in Discrete Models: An Introductory Survey". Cap. 1 in *Chaos in Automatic Control*, Perruquetti, W., Barbot J.P.,eds. World Scientific Publishing Co.
- [Murali y Sinha (2003)] Murali, K. and S. Sinha. (2003). "Experimental realization of chaos control by thresholding" *Physical Review*, **E-68**, pp. 016210-1 016210-6.
- [Nagore *et al* (2013)] Nagore Iriondo, E. E., Rafael Priego, Marga Marcos. (2013). "Arquitectura multi-controlador con transferencia sin salto para procesos con conmutación de modos", *R. Iberoamer. de Autom. e Inform. Industr.*, **10**, pp. 204 215.
- [Nakajima (1997)] Nakajima, H. (1997). "On analytical properties of delayed feedback control of chaos" *Phys. Lett. A* no. 232 pp. 207 210.
- [Nakajima y Ueda (1998)] Nakajima, H., Y. Ueda. (1998). "Limitation of generalized delayed feedback control" *Physica D* no. 111 pp. 143 150.
- [Ogorzalek (1993a)] Ogorzalek, M.J. "Taming Chaos: Part I: Synchronization," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 40, no. 10, pp. 693 699.

- [Ogorzalek (1993b)] Ogorzalek, M.J. (1993). "Taming Chaos: Part II: Control," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, **40**, no. 10, pp. 700 707.
- [Ogorzalek (1998)] Ogorzalek, M.J. (1998). "Design considerations for electronics chaos controllers" *Chaos, Sol. and Fractals*, **9**, pp. 295 306.
- [Ogorzalek (Unesco EOLSS)] Ogorzalek, M.J., "Electronic Chaos Controllers. From Theory to Applications" UNESCO EOLSS Control Systems, Robotics and Automation, Vol XIII. <http://www.eolss.net>.
- [Ott *et al* (1990)] Ott, E., C. Grebogi and J. A. Yorke. (1990). "Controlling chaos", *Phys. Rev. Lett*, **64**, no. 11, pp. 1196 1199.
- [Parker y Chua (1989)] Parker, T.S. and Chua, L.O. (1990). "Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems", Springer-Verlag.
- [Pérez (2012)] Pérez Martínez, M<sup>a</sup> Carmen, (2012). "Estudio de la estabilidad y control de los sistemas cambiantes", *Tesis Doctoral*, Departamento de Matemáticas. Universidad de Cádiz.
- [Perruquetti y Burbet (2006)] Perruquetti, W. and J.P. Burbet. Editores (2006). "Chaos in Automatic Control." *Taylor and Francis Edit.*
- [Piccardi y Rinaldi (2000)] Piccardi, C. and S. Rinaldi. (2000). "Optimal control of chaotic systems via peak-to-peak maps" *Phys. D* **144** pp. 298 308.
- [Piccardi y Rinaldi (2003)] Piccardi, C. and S. Rinaldi. (2003). "The impact of noise and sampling frequency on the control of peak-to-peak dynamics" *I.J. of Bif. and Chaos*, **12**, no. 6 pp. 1579 1586.
- [Prian *et al* (2009)] Prian, M., M.J. López and F.M. Verdulla. (2009). "Estabilización de órbitas periódicas inestables en sistemas caóticos mediante controlador híbrido". *Dpto. ISA, UCA*.
- [Prian *et al.*(2011)] Prian, M., M.J. López and F.M. Verdulla.(2011). "Chaos Stabilization via Hybrid Control" *IEEE Latin America Transactions*, **9**, no. 3, pp. 252 262.
- [Prian *et al* (2012)] Prian, M., M.J. López and F.M Verdulla. (2012). "Chatter chaos rejection by adaptive control" *AIP Conf. Proc.* **1431**, 676 -683.
- [Prian *et al.*(2015)] Prian, M., M.J. López and F.M. Verdulla.(2011). "Análisis de un sistema de control híbrido adaptativo que estabiliza órbitas periódicas inestables embebidas en atractores caóticos" *Revista Iberoamericana de Automática en Informática Industrial*, no. 12, pp. 154 165.
- [Prian (2015)] Prian Rodríguez, M., (2015). "Contribución al control de estados de equilibrio inestables en sistemas dinámicos. Aplicación al control de sistemas caóticos." *Tesis Doctoral*. Universidad de Cádiz, Julio 2015.
- [Pyragas (1992)] Pyragas, K. (1992). "Continuous control of chaos by self-controlling feedback" *Physics Letters A* no. 170 pp. 421 428.
- [Pyragas *et al* (2004)] Pyragas, K., V. Pyragas, Z. Kiss and J. L. H. Benner. (2004) "Adaptive control of unknown unstable steady states of dynamical systems," *Phys. Review E*, no. 70.
- [Pyragas y Pyragas (2006)] Pyragas, V. and K. Pyragas. (2006). "Delayed feedback control of the Lorenz system: An analytical treatment at a subcritical Hopf bifurcation" *Physical Review E*, no. 73.
- [Pyragas y Pyragas (2011)] Pyragas, V. and K. Pyragas. (2011). "Adaptive delayed feedback control algorithm with a state dependent delay" ENOC 2011, 24-29 July, Rome, Italy

- [Pyragiene y Pyragas (2005)] Pyragiene, T. and K. Pyragas. (2005). "Delayed feedback control of forced self-sustained oscillations" *Phys. Rev. E*, no. 72.
- [Pyragas *et al* (2008)] Pyragas K., Tatjana Pyragiene, and Viktoras Pyragas (2008) "An Analytical Treatment of the Delayed Feedback Control Algorithm" in *Handbook of Chaos Control*, 2nd Ed. Edited by E. Schöll and H.G. Schuster WILEY-VCH Verlag.
- [Quintana y Ciurana (2011)] Quintana. G. and Ciurana, J. "Chatter in machining processes: A review". *International Journal of Machine Tools and Manufacture*.
- [Radecki *et al* (2009)] Radecki, P.P. Kruse, W.A. Welsh, A. J. Moro, E. A. Park, G. and Bement, M.T. "Improving a turning process using piezoelectric actuators" *Proceedings of the IMAC-XXVII*, Orlando, Florida.
- [Rubio y López (1996)] Rodríguez Rubio, F.; López Sánchez, M. J., "Control Adaptativo y Robusto" (1996) Ed. *Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla*. España.
- [Scott (2007)] Scott, A. C. "THE NONLINEAR UNIVERSE Chaos, Emergence, Life". *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*. 2007.
- [Shaw *et al* (2008)] Shaw, S. W. and Balachandran, B. "A Review of Nonlinear Dynamics of Mechanical Systems in Year 2008" *Journal of System Design and Dynamics*. 2, 3, 611-640.
- [Slotine y Li (1991)] Slotine, J-J. E., Li, W. "Applied Nonlinear Control". *Prentice-Hall, Inc.*.
- [Souza y Amorin (2011)] Souza de Paula, A. Amorin, M. "Comparative analysis of chaos control methods: A mechanical system case study". *International Journal of Non-Linear Mechanics* vol 46 pp 1076 1089.
- [Sprott (2003)] Sprott, J. C. "Chaos and time-series analysis". Ed. *Oxford University Press*.
- [Stépán (2001)] Stépán, G. "Modelling nonlinear regenerative effects in metal cutting" *Phil. Trans. R. Soc. London*. 359, 739-757.
- [Stépán *et al* (2004)] Stépán, G. Szalai, R. and Insperger, T. "Nonlinear Dynamics of High-Speed Milling Subjected to Regenerative Effect", *Radons and Neugenbauer Ed., Wiley-VCH*, Weinheim, (Germany).
- [Stépán *et al* (2005)] Stépán, G. Insperger T. and Szalai, R. "Delay, parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes" *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15, 9, 2783-2798.
- [Sun *et al* (2003)] Sun, J.T. and Zhang, Y.P. "Stability analysis of impulsive control systems" *IEEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 150, pp. 331 334
- [Sun y Ge (2005)] Sun, Z.; Ge, S. S., "Switched Linear Systems: Control and Design", Springer-Verlag.
- [Tian *et al* (2004)] Tian, Y-P. and X. Yu and L. O. Chua. (2004). "Time-Delayed impulsive control of chaotic hybrid systems" *I.J. of Bif. and Chaos*, **14**, no. 3 pp. 1091 1104.
- [Tian y Yu (2003)] Tian, Yu-ping and Yu, Xinghuo. (2003). "Time delayed impulsive stabilization of unstable periodic orbits in chaotic hybrid systems", *Chaos Control. Theory and applic.* G. Chen and X. Yu Ed. Springer-Verlang.
- [Thomson y Stewart (2002)] Thomson J.M.T.; Stewart, H.B. Nonlinear dynamics and chaos (Second Edition) 2002 John Wiley and Son Ltd England
- [Ushio (1996)] Ushio, T. (1996). "Limitation of delayed feedback control in nonlinear discrete-time systems," *IEEE Trans. Circ. Sys. I*, **43**, pp. 815 816.

- [Verdulla *et al* (2009)] Verdulla, F.M., M.J. López and M. Prian. (2009). "A pulsed control method for chaotic systems" *IEEE Latin America Transactions*, **7**, no. 1, pp. 1 11.
- [Verdulla *et al* (2011a)] Verdulla, F.M., M.J. López and M. Prian. (2011). "Control de sistemas caóticos basado en condición de evento variable ajustada a la dinámica del proceso" *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, **8**, no. 1, pp. 159 166.
- [Verdulla *et al* (2011b)] Verdulla, F.M., M.J. López and M. Prian. (2011). "An Experimental Realization of a Pulsed Control Method for the KSS Chaotic Circuit" *IEEE Latin America Transactions*, **9**, no. 3, pp. 240 247.
- [Verdulla *et al* (2012)] Verdulla, F.M., M.J. López and M. Prian. (2012). "A pulsed control method for chaotic oscillations" *AIP Conf. Proc.* **1431**, 660 667 doi: 10.1063/1.4707621
- [Wang *et al* (2006)] Wang, X.S. Hu, J. and Gao, J.B. "Nonlinear dynamics of regenerative cutting processes. Comparison of two models" *Chaos, Solitons and Fractals* **29** 1219-1228.
- [Wei y Luo (2007)] Wei, D.Q., X.S. Luo. "Passivity-based adaptive control of chaotic oscillations in power system." *Chaos, Solitons and Fractals* **31** 665-671.
- [Wiener *et al* (2006)] Wiener, R. J. Callan, K. E. Hall S. C. and Olsen, T. "Proportional feedback control of chaos in a simple electronic oscillator" *Am. J. Phys.*, Vol. 74, No. 3.
- [Wiercigroch y Cheng (1997)] Wiercigroch, M. and Cheng, A. H-D. "Chaotic and Stochastic Dynamics of Orthogonal Metal Cutting" *Chaos. Solitons and Fractals*, **8**, 4, pp. 715-726.
- [Wiggins (2003)] Wiggins, S. "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos" 2nd ed. Springer-Verlag.
- [Xiao y Kang (2002)] Xiao, M.; Kang, W. "Controlable or Uncontrolable? A Bifurcation Approach" *Proceedings of 41th IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, Nevada, USA December 2002. pp. 3901 3905
- [Yamamoto *et al* (2001)] Yamamoto, S., T. Hino and T. Ushio. (2001). "Dynamic Delayed Feedback Controllers for Chaotic Discrete-Time Systems," *IEEE Trans. Circuits Sys. I*, **48**, no. 6, pp. 789 795.
- [Yang y Chua (1997)] Yang T. and L. O. Chua, "Impulsive control and synchronization of nonlinear dynamical systems and application to secure communication", *Int. J. of Bifur. Chaos*, vol. 7
- [Yang(1999)] Yang, T. (1999). "Impulsive Control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**, n. 5 pp. 1081 1083.
- [Yang *et al* (2013)] Yang, Z., T. Jiang and Z.Jing, "Bifurcations of periodic solutions and chaos in Duffing-Van der Pol equation with one external forcing." *Journal of Applied Analysis and Computation*. Vol. **3**, Number 4, pp. 405 431 November 2013.
- [Yassen (2005)] Yassen, M.T. "Feedback and adaptive synchronization of chaotic Lu system," *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 25, pp. 379 386.
- [Yau *et al* (2000)] Yau, H.T., Chen, C. K., Chen, C. L. (200) "Sliding mode control of chaotic systems with uncertainties", *Int. J. Bifur. Chaos*, Vol. **10**, pp. 1139 1147
- [Yu (1997)] Yu, X.H., (1997) "Variable structure control approach for controlling chaos". *Chaos, Solitons, Fractals*, Vol. **8**, pp. 1577 1586
- [Yu (1999)] Yu, X. H. "Tracking inherent periodic orbits in chaotic dynamic systems via adaptive variable structure time-delayed self control," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 46, pp. 1408 1411.

